

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 0. Sites et topos	4
§ 1. Topologies, sites	4
§ 2. Faisceaux, topos	6
§ 3. Morphismes de sites, de topos	10
Chapitre I. Catégories fibrées et scindées	18
§ 1. Rappels et notations	18
1.1. Les catégories de morphismes	19
1.2. Les accouplements de composition	21
1.3. Les foncteurs de composition	22
1.4. Leurs propriétés algébriques	22
1.5. Composition avec une E -équivalence	23
1.6. Changement de base	24
1.7. Univers	25
1.8. La 2-catégorie $\mathcal{Fib}(E)$	26
1.9. La 2-catégorie $\mathcal{Scin}(E)$	27
1.10. La catégorie $\overrightarrow{\text{Lim}}(F/A)$	28
1.11. Adjoint d'un E -foncteur	29
§ 2. Le changement de base et ses adjoints	32
2.1. Notations	32
2.2. Adjoint d'un 2-foncteur	33
2.3. Les 2-foncteurs de changement de base	35
2.4. Les adjoints de \mathcal{Oub}_u	37
2.5. Les 2-foncteurs u_{fib}^* et u_{fib}^\dagger	41
2.6. Les préfaisceaux de S -morphisms	47
2.6.1. La catégorie fibrée des préfaisceaux	47
2.6.2. Préfaisceaux $\text{Hom}_S(x, y)$ dans une catégorie scindée	49
2.6.3. Dans une catégorie fibrée	50
2.6.5. Effet d'un changement de base	51

§ 3. Extension à \hat{E} d'une E -catégorie fibrée	53
3.1. Univers	53
3.2. L'extension canonique à \hat{E}	53
3.3. La E -catégorie $\text{CART}(F, G)$	56
Chapitre II. Les champs	64
§ 1. Propriétés diverses	64
1.1. Topologie de la F -descente	64
1.2. Champs sur un site	67
1.3. Champs sur un U -site	69
1.4. E -foncteurs couvrants et bicouvrants	72
§ 2. Champ associé à une catégorie fibrée	76
2.1. Théorème d'existence	76
2.2. Champ scindé associé à une catégorie fibrée	78
§ 3. Images directe et inverse de champs	82
3.1. Image directe	82
3.2. Image inverse de champs	84
3.3. Champs sur un site et sur le topos associé	91
3.4. Le champ des faisceaux sur un site	94
3.5. Les faisceaux $\text{Aut}_S(x)$ des S -automorphismes	104
Chapitre III. Torseurs. Cohomologie de degré 1	106
§ 1. Objets à opérateurs dans un topos	106
1.1. Introduction: Objets à opérateurs dans une catégorie	106
1.2. Les objets $\text{Hom}_G(P, Q)$ dans un topos	108
1.3. Le produit contracté $P \times_G Q$; extension du groupe structural	114
1.4. Torseurs dans un topos	117
1.5. Opposé d'un torseur; bitorseurs	121
1.6. Produit contracté par un torseur	123
1.7. Torseurs sur un site	126
§ 2. Torseurs et objets à faisceaux d'opérateurs dans un champ	129
2.1. Gerbes. Factorisation canonique d'un champ	129
2.2. Morphismes d'une gerbe triviale dans un champ	137
2.3. Objets tordus	140
2.4. L'ensemble pointé $H^1(A)$ associé à un faisceau de groupes	148
2.5. Classification d'objets localement isomorphes à un objet donné	151
2.6. Changement d'origine	153

§ 3. La suite exacte en degré 1	156
3.1. Le premier opérateur cobord	156
3.2. Cas d'un sous-groupe	159
3.3. Cas d'un sous-groupe invariant	161
3.4. Cas d'un sous-groupe abélien ou central	164
3.5. Effaçabilité; cohomologie abélienne	168
3.6. Cohomologie de Čech	170
3.7. Calculs galoisiens	177
Chapitre IV. Liens et Gerbes (Cohomologie de degré 2)	184
§ 1. Liens sur un site	184
1.1. Le champ des liens	184
1.2. Propriétés locales des liens	191
1.3. Quotients de liens	194
1.4. Produits finis de liens	198
1.5. Centralisateur d'un morphisme de liens	199
1.6. Le produit contracté $L_{\wedge}^C M$ de deux liens	204
§ 2. Gerbes liées	207
2.1. Opérations d'un lien sur un champ	207
2.2. Lien d'une gerbe	212
2.3. La gerbe des morphismes liés	217
2.4. Le produit contracté $P_{\wedge}^C Q$ de deux gerbes	229
2.5. La gerbe des relèvements d'une section.	236
§ 3. L'ensemble $H^2(L)$ attaché à un lien L	247
3.1. Définition, «fonctorialité»	247
3.2. La gerbe des représentants d'un lien L ; description de l'ensemble $H^2(L)'$ des classes neutres	252
3.3. Comparaison entre la cohomologie d'un lien et celle de son centre	256
3.4. Cohomologie abélienne	259
3.5. Cohomologie de Čech	264
3.6. Calculs galoisiens (suite)	271
§ 4. Prolongement de la suite exacte de cohomologie.	273
4.1. Suites exactes de liens	273
4.2. Le second cobord	279
4.3. Compléments sur la suite exacte	285
§ 5. Compléments	293
5.1. Existence de sections d'un espace homogène	293
5.2. Bitorseurs	295

Chapitre V. Effet d'un morphisme de sites sur la cohomologie . . .	302
§ 1. Changement de site	302
1.1. Image inverse de faisceaux de groupes	302
1.2. Image inverse de liens	304
1.3. Image inverse d'un objet tordu	310
1.4. Image inverse de gerbes	313
1.5. Les applications $H^i(E, A) \rightarrow H^i(E', f^*(A))$	316
§ 2. Les faisceaux $R^1 f_*(A)$	319
§ 3. La suite exacte attachée à un morphisme de sites	321
3.1. Le cas général	321
3.2. Le cas abélien; transgression	330
3.3. Interprétation du second cobord attaché à un revêtement de groupes topologiques	337
§ 4. Calculs formels concernant le groupe de Brauer	339
Chapitre VI. Liens et 3-cohomologie	348
§ 1. Effaçabilité	348
§ 2. L'obstruction $c(L) \in H^3(C)$ attachée à un lien L de centre C	361
Chapitre VII. Exemples tirés de la Géométrie Algébrique	369
§ 1. Relèvement infinitésimal de schémas lisses	369
1.1. Relèvements d'homomorphismes	369
1.2. Relèvements de schémas lisses	373
1.3. Relèvements de toseurs	374
§ 2. Deux théorèmes de M. Artin et A. Grothendieck	377
2.1. Le changement de base lisse	378
2.2. Le changement de base pour un morphisme propre	383
Chapitre VIII. Extension d'un topos	392
§ 0. Conventions	392
§ 1. Localisation d'un topos	397
§ 2. Champs de topos	400
§ 3. Morphismes de champs de topos	407
§ 4. Le topos classifiant d'un faisceau de groupes	411

§ 5. Topos classifiant d'une gerbe et effacement d'une classe de cohomologie de degré 2	416
5.1. Construction du topos classifiant $B_{\mathbb{G}}(X)$ d'une gerbe \mathbb{G}	417
5.2. La propriété universelle de $B_{\mathbb{G}}(X)$	419
5.3. Extensions d'un topos	425
§ 6. Interprétation de $H^2(X, L)$ en termes d'extensions du topos X	428
6.1. Liens sur un topos classifiant	429
6.2. La classe $b \in H^2(X, L)$ attachée à une extension B d'un topos X	432
§ 7. Extensions de groupes dans un topos	437
7.1. Une suite exacte pour les extensions de groupes à noyau abélien	437
7.2. Extensions d'un groupe H et extensions du topos B_H	441
7.3. Extensions d'un groupe H par un lien F sur B_H	445
7.4. Extensions de groupes et cohomologie des groupes discrets	452
§ 8. Extensions de groupes topologiques	453
Bibliographie	459
Index des notations	461
Index terminologique	465