

INHALTSVERZEICHNIS

<i>I. Mengen und Abbildungen</i>	1
1. Mengen	1
1.1. Einführung	1
1.2. Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen	5
1.3. Mengenringe	10
1.4. Produkt von Mengen	13
2. Abbildungen und Funktionen	15
2.1. Abbildungen	15
2.2. Funktionen	19
2.3. Verknüpfungen	22
2.4. Relationen	23
2.5. Halbordnung	27
3. ZORN'SCHES LEMMA	29
3.1. Fixelementsatz von BOURBAKI-KNESER	29
3.2. Auswahlaxiom und mit ihm verwandte Aussagen	30
4. Kardinalzahlen	32
4.1. Kardinalzahl einer unendlichen Menge	32
4.2. Abzählbare Mengen	34
4.3. Mächtigkeit des Kontinuums	35
4.4. Skala der Kardinalzahlen	38
4.5. Summe und Produkt von Kardinalzahlen	41
 <i>II. Vektorräume und lineare Funktionen</i>	 44
5. Lineare Räume	44
5.1. Definition des linearen Raumes	45
5.2. Basis eines linearen Raumes	48
5.3. Dimension eines linearen Raumes	50
6. Lineare und multilineare Funktionen	53
6.1. Definition der linearen Funktion	53
6.2. Lineare Funktionen auf endlichdimensionalen Vektorräumen	55
6.3. Multilineare Funktionen	56
7. Lineare Funktionale	60
7.1. Hyperebenen und lineare Funktionale	60
7.2. Konvexe Mengen	61
7.3. Halbnormen	64
7.4. Erweiterungssätze für lineare Funktionale	67
 <i>III. Metrische Räume und stetige Funktionen</i>	 70
8. Metrische Räume	70
8.1. Definition des metrischen Raumes	70
8.2. Offene und abgeschlossene Teilräume	75
8.3. Dichte Teilräume	80
8.4. Separable metrische Räume	82

9.	Folgen im metrischen Raum	83
9.1.	Konvergente Folgen	83
9.2.	Vollständige metrische Räume	86
9.3.	Kompakte metrische Räume	90
10.	Teilräume erster und zweiter Kategorie	94
10.1.	F_σ - und G_δ -Mengen	94
10.2.	Teilräume erster und zweiter Kategorie	96
10.3.	Teilräume zweiter Kategorie in einem vollständigen metrischen Raum	98
11.	Stetige Funktionen	99
11.1.	Schwankung und Stetigkeit in einem Punkt	100
11.2.	Stetigkeit auf einer Punktmenge	105
11.3.	Partiell stetige Funktionen	108
11.4.	Homöomorphismen	110
12.	Raum der stetigen beschränkten Funktionen	113
12.1.	Metrischer Raum $C(X, Y)$	113
12.2.	Stetige Funktionen auf kompakten Räumen	116
12.3.	Approximationssätze von STONE-WEIERSTRASS	120
12.4.	Prinzip der kontrahierenden Abbildung	124
IV.	<i>Normierte Räume und lineare stetige Funktionen</i>	129
13.	Normierte Räume	129
13.1.	Definition des normierten Raumes	130
13.2.	Reihen	133
14.	Lineare stetige Funktionen	136
14.1.	Stetigkeit linearer Funktionen	137
14.2.	Raum der linearen stetigen Funktionen	138
14.3.	Folgen linearer stetiger Funktionen	142
14.4.	Isomorphie von normierten Räumen	146
14.5.	Multilineare stetige Funktionen	148
15.	Erweiterungssätze für lineare stetige Funktionen	150
15.1.	Konvexe Mengen in einem reellen normierten Raum	150
15.2.	Erweiterungssätze für lineare stetige Funktionen	154
15.3.	Vervollständigung eines normierten Raumes	158
V.	<i>Intervallfunktionen und Grenzfunktionen</i>	160
16.	Intervallfunktionen	160
16.1.	Intervalle im euklidischen Raum	160
16.2.	Additive Intervallfunktionen	162
16.3.	Stetige Intervallfunktionen	166
16.4.	Additive Intervallfunktionen endlicher Variation	170
17.	Maße	173
17.1.	Eigenschaften des Maßes	174
17.2.	Erweiterung einer nichtnegativen σ -additiven Intervallfunktion zu einem vollständigen Maß	178
17.3.	LEBESGUE-meßbare Mengen	184
17.4.	Überdeckungssatz von VITALI	186
17.5.	Meßbare Funktionen	191
18.	Grenzfunktionen von Intervallfunktionen	197
18.1.	Definition der Grenzfunktion einer Intervallfunktion	197
18.2.	Hinreichendes Kriterium für die m -Stetigkeit additiver Intervallfunktionen	199
18.3.	M -Eigenschaft einer Intervallfunktion	201
18.4.	Zwischenwertsatz für Grenzfunktionen	205

18.5. Reguläre Ableitung additiver Intervallfunktionen endlicher Variation	209
19. Mittelwertsätze für Intervallfunktionen	211
19.1. Mittelwertsätze für reellwertige Intervallfunktionen	211
19.2. Mittelwertsätze für vektorwertige Intervallfunktionen	215
<i>VI. Differentialrechnung für Funktionen mit reellen Variablen</i>	220
20. Differenzierbare Funktionen einer Variablen	220
20.1. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	220
20.2. Mittelwertsätze	223
20.3. RIEMANNsche Integration	226
20.4. TAYLORSche Formel	229
21. Differenzierbare Funktionen mit mehreren Variablen	232
21.1. Richtungsableitungen	232
21.2. Differenzierbare Funktionen	235
22. Partielle Ableitungen höherer Ordnung von Funktionen zweier Variablen	239
22.1. Differenzenableitungen	239
22.2. Partielle Ableitungen zweiter Ordnung	243
22.3. Funktionen endlicher Variation	245
22.4. Zwei TAYLORSche Formeln	247
23. Differentialgleichungen	249
23.1. Existenz- und Eindeigkeitssätze für gewöhnliche Differentialgleichungen	249
23.2. Eindeigkeitssatz für hyperbolische partielle Differentialgleichungen	254
<i>VII. Differentialrechnung für Funktionen mit vektorwertigen Variablen</i>	257
24. Ableitungen und Differentiale	257
24.1. GÂTEAUXsche und FRÉCHETSche Ableitungen	257
24.2. Eigenschaften der FRÉCHETSchen Ableitung	264
24.3. Stammfunktionen	270
25. Ableitungen höherer Ordnung	275
25.1. Definition der Ableitungen höherer Ordnung	275
25.2. TAYLORSche Formel	280
25.3. Polynome	282
25.4. Relative Extrema	289
26. Inverse und implizite Funktionen	293
26.1. Inverse einer linearen stetigen Funktion	293
26.2. Lokale Inverse einer stetig differenzierbaren Funktion	297
26.3. Implizite Funktionen	301
<i>VIII. Integralrechnung</i>	305
27. Integrierbare Funktionen	305
27.1. Integral einer Treppenfunktion	305
27.2. Erweiterung des Integralbegriffes	308
27.3. Eigenschaften des Integrals	313
27.4. Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration	315
27.5. BANACH-Raum $L_p(\mu, F)$	319
28. Integration über eine Produktmenge	324
28.1. σ -Algebra einer Produktmenge	324
28.2. Produktmaß	326
28.3. Satz von FUBINI	328
29. Integration über den euklidischen Raum	331
29.1. Zusammenhang zwischen dem RIEMANN- und dem LEBESGUE-Integral	331

29.2. Partielle Integration	336
29.3. Integration über einen Normalbereich	338
29.4. Substitutionsregel	340
30. Unbestimmte Integrale	346
30.1. Variation einer Mengenfunktion	346
30.2. Satz von RADON-NIKODYM	352
30.3. Reguläre Ableitung eines unbestimmten LEBESGUE-Integrals	356
30.4. Absolut stetige Funktionen mit reellen Variablen	359
Literaturverzeichnis	369
Symbolverzeichnis	375
Sachverzeichnis	377