

TABLE DES MATIERES

Chapitre I. FONCTIONS A p -VARIATION BORNEE	1
I. Espace de Banach des fonctions à p -variation bornée	1
II. Factorisation des fonctions à p -v. b.	2
III. Calcul de la p -variation d'une fonction	3
IV. p -variation fine	6
V. Densité de la p -variation fine	10
VI. Fonctions lipschitziennes d'ordre $\frac{1}{p}$ et fonctions p -absolument continues	12
VII. Fonctions p -fines	13
VIII. Fonctions p, α -fines	14
Bibliographie	18
 Chapitre II. FONCTIONS p -FINES ET POINTS EXTREMAUX	 19
I. Points extrémaux de la boule unité de $\mathfrak{B}_p(T)$	19
II. Une condition nécessaire et une condition suffisante pour qu'une fonction soit extrémale	20
III. Caractérisation des fonctions fines	22
IV. Fonctions très fines	23
V. Caractérisation des fonctions extrémales	25
VI. Démonstration du théorème 1	30
VII. Démonstration du lemme 1	34
VIII. Démonstration du théorème 5	39
IX. Démonstration du théorème 6	42
X. Etude de la mesure μ_f	43
XI. Démonstration du théorème 8	49
XII. Démonstration du théorème 7 (condition nécessaire)	50
XIII. Fin de la démonstration du théorème 7 (condition suffisante)	55

XIV. Démonstration du théorème 9	65
Bibliographie	67
Chapitre III. FONCTIONS p, α -FINES ET NOMBRES MAL APPROCHES ...	68
I. Mesures et dimensions de Hausdorff	68
II. Fonctions p, α -fines et p, α -fines *	69
III. Approximation par une suite	70
IV. Démonstration du théorème 4	73
V. Démonstration du théorème 5	82
A) Etude de l'équation (17)	82
B) Démonstration du théorème 5	83
VI. Exemples	83
VII. Fonctions p, α -fines et suites adaptées	87
VIII. Sur les ensembles de nombres mal approchés	89
IX. Sur une généralisation du théorème 1	96
Bibliographie	98
Chapitre IV. MESURES DE CARATHEODORY ET MESURES DE BESICO- VITCH	100
I. Mesures de Carathéodory	100
A) Définition	100
B) Mesures de Carathéodory discrètes	102
C) Régularité de μ^*	103
D) Démonstration du théorème 1	104
II. Propriétés des valeurs intermédiaires	112
III. Mesures σ -finies diffuses	125
IV. Mesures de Hausdorff	135
V. Une condition suffisante pour qu'une fonction d'ensembles soit une mesure	135
VI. Mesures de Besicovitch	139
A) Définition	140
B) Mesures de Besicovitch discrètes	142
C) Mesures finies et σ -finies	143
D) Problèmes	143
Bibliographie	144
Chapitre V. VARIATION TOTALE D'UNE FONCTION	145
I. Variation totale d'une fonction	145
A) Introduction	145
B) Compacts sur lesquels une fonction ne varie pas	149
C) Variation réductible et variation irréductible	151
II. La variation réductible d'une fonction	152
A) Compacts sur lesquels la variation réductible d'une fonction est nulle	152
B) Sur les nombres dérivés d'une fonction	154
C) Fonctions à variation σ -bornée	171
D) Caractérisation des compacts sur lesquels une fonction a une variation réductible nulle	174
E) Variation réductible d'une fonction	179
F) Croissance et décroissance d'une fonction sur un borélien ...	182
G) Détermination de la mesure de Lebesgue-Stieltjes d'une fonc- tion arbitraire	185

III.	Propriété des valeurs intermédiaires	189
	A) Position du problème	189
	B) Le résultat	190
	C) Boréliens sur lesquels une fonction a une variation réductible bornée	201
IV.	La variation totale d'une fonction	204
	A) L'oscillation d'une fonction	204
	B) Boréliens sur lesquels une fonction ne varie pas	204
	C) Boréliens sur lesquels une fonction a une variation réductible nulle	204
	D) La variation totale d'une fonction	205
	E) Variation totale et variation réductible	217
	F) Variation irréductible d'une fonction	218
	G) Propriété des valeurs intermédiaires	219
	H) Démonstration des théorèmes 1, 6, 7, 16 et 17	220
	I) Nouvelle caractérisation des fonctions à variation σ -bornée ..	222
V.	Caractérisation de certains espaces de fonctions et de certains ensembles de mesures	224
	A) Caractérisation de quelques espaces de fonctions	225
	B) Variation extérieure d'une fonction	225
	C) Caractérisation de certains ensembles de mesures	226
VI.	Variation totale d'une fonction définie sur une partie borélienne de \mathbf{R}	227
	Bibliographie	227

Chapitre VI.	UNE GENERALISATION DU THEOREME DE DECOMPOSITION DE LEBESGUE	231
I.	Décomposition par rapport à une mesure σ -finie	231
II.	Décomposition par rapport à une mesure quelconque	234
III.	Mesures vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires	238
IV.	Problèmes	243
V.	Applications	244
	A) Mesures de Carathéodory	244
	B) Variation totale d'une fonction	246
	Bibliographie	247

Chapitre VII.	SUR LES NOMBRES DERIVES D'UNE FONCTION	248
	Bibliographie	263

Annexe I.	REMARQUES DIVERSES	264
I.	Fonctions à ϕ -v. b.	264
II.	Un résultat élémentaire d'approximation	265
III.	Fonctions p, α -fines et mesures de Hausdorff	266
IV.	Fonctions lipschitziennes d'ordre $\frac{1}{p}$, p -fines	266
V.	Sur le mouvement brownien	267
	A) Loi bilatérale du logarithme itéré	268
	B) Variation totale des trajectoires d'un mouvement brownien linéaire (cas où $n = 1$)	268
	C) Variation d'une trajectoire d'un mouvement brownien linéaire sur l'ensemble de ses zéros	269
VI.	Sur le recouvrement de $[0, 1]$ par des intervalles ouverts	270
VII.	Sur la limite bilatérale supérieure relative à une fonction de deux variables	271

VIII.	Sur la mesure de Lebesgue-Stieltjes	273
IX.	Sur certaines généralisations de la notion de variation	275
	A) Fonctions définies sur une partie fermée T de \mathbf{R} , à va- leurs dans un espace métrique (E, d)	275
	B) Application d'un groupe commutatif localement compact dans lui-même	275
X.	Mesures de Carathéodory sur les espaces métriques et sur les es- paces uniformes	276
	A) Mesures de Carathéodory sur les espaces métriques	276
	B) Mesures de Carathéodory sur les espaces uniformes	277
XI.	Sur les fonctions à p -v. b. extrémales	278
XII.	Sur les séries de Fourier très lacunaires	278

Annexe II.	FONCTIONS p, α -FINES ET SUITES ADAPTEES	280
I.	Rappel des résultats	280
II.	Démonstration du théorème 6	281
III.	Démonstration du théorème 7	283
IV.	Démonstration du théorème 8	289

Annexe III.	EXEMPLES DE FONCTIONS p, α -FINES	292
I.	Fonctions p, α -fines	292
II.	Fonctions p, α -fines données par leur série de Fourier	292
III.	Fonctions p, α -fines dont l'ensemble exceptionnel est un ensemble de nombres non-normaux	299
IV.	Une courbe de Péano qui est une fonction $2, 1$ -fine	302
V.	Une fonction $p, 1$ -fine ($p \geq 2$) dont l'ensemble exceptionnel est vide	304
VI.	Fonctions p -fines et factorisation canonique	305
	A) Fonctions $\varphi_{a,b}$	305
	B) Fonctions $\varphi_{a,a',b,b'}$	306
VII.	Fonctions 2 -fines et fonctions 2 -extrémales	306

Annexe IV.	VARIATION D'UNE FONCTION SUR UN COMPACT	308
I.	Définition des nombres $v_f^b(P), v_f^d(P)$	308
II.	Comparaison des nombres $v_f^b(P), v_f^d(P)$ et $v_f(P)$	310
	Bibliographie	315

Index des notations usuelles	316
Index des notations spécifiques	320
Index terminologique	325
Index des principaux théorèmes	329
Index des problèmes	331