

Inhalt

Einleitung	17
I. Grundzüge der allgemeinen Topologie	23
§ 1. Axiome der allgemeinen Topologie	23
1. Definition des topologischen Raumes	23
2. Das System der abgeschlossenen Mengen	24
3. Das Dualitätsprinzip	25
§ 2. Vergleich und Erzeugung von Topologien	25
1. Vergleich von Topologien	25
2. Erzeugung von Topologien	26
3. Metrische Räume	28
4. Geordnete Mengen	31
5. Dualisierung des Erzeugungsverfahrens	32
§ 3. Stetige und topologische Abbildungen	34
1. Abbildungen	34
2. Stetige Abbildungen	34
3. Homöomorphismen	36
4. Absolute Homöomorphie	37
§ 4. Relative Topologie	39
1. Teilräume	39
2. Teilräume metrischer Räume	41
3. Teilmengen geordneter Mengen	42
4. Einschränkung von Abbildungen	44
5. Relative Homöomorphie	46
II. Punktale und lokale Eigenschaften	47
§ 5. Umgebungen	47
1. Umgebungen und Filter	47
2. Erzeugung von Filtern	48
3. Umgebungsbasen	49
4. Spurbildungen	50
5. Umgebungsräume	51
§ 6. Stetigkeit in einem Punkt	53
1. Abbildungen von Filtern	53
2. In einem Punkt stetige Abbildungen	54
3. Punktale Homöomorphie	55

4. Lokale Homöomorphie	58
5. Lokaleuklidische Räume	59
§ 7. Der offene Kern und die abgeschlossene Hülle	61
1. Relative punktale Homöomorphie	61
2. Innere Punkte	62
3. Berührungspunkte	63
4. Begrenzungspunkte	65
5. Dichte Mengen	65
6. Separable Räume	66
7. Nirgends dichte Mengen	68
8. Häufungspunkte	68
9. In sich dichte Mengen	69
10. Isolierte Mengen	69
11. Der Verdichtungsgrad	70
12. Die Axiome der abgeschlossenen Hülle	70
§ 8. Konvergenz	71
1. Konvergente Folgen	71
2. Gefilterte Familien	72
3. Konvergenz von gefilterten Familien	75
4. Die Adhärenz	77
5. Konvergenz und Stetigkeit	79
6. Konvergenz in A_1 -Räumen	79
7. Konvergenz in metrischen Räumen	81
8. Konvergenz in geordneten Mengen	83
9. Axiomatik des Limesbegriffes	87
III. Operationen mit topologischen Räumen	89
§ 9. Erzeugung von Topologien durch Abbildungen	89
1. Das inverse Bild einer Topologie	89
2. Offene und abgeschlossene Abbildungen	90
3. Das direkte Bild einer Topologie	92
4. Stark stetige Abbildungen	92
5. Summe topologischer Räume	94
§ 10. Produkte von topologischen Räumen	94
1. Endliche Produkte	94
2. Unendliche Produkte	96
3. Produkte von Teilräumen	97
4. Konvergenz in Produkträumen	98
5. Abbildungen in Produkträume	99
6. Abbildungen von Produkträumen	102
7. Anwendungen	103
8. Das Gewicht von Produkträumen	105
9. Produkte metrischer Räume	107
§ 11. Quotientenräume	110
1. Äquivalenzrelationen	110
2. Die Quotiententopologie	111
3. Quotientenräume von Teilräumen	113
4. Abgeschlossene und offene Äquivalenzrelationen	114

5. Abbildungen von Quotientenräumen	115
6. Transitivität der Quotientenbildung	115
IV. Trennungseigenschaften topologischer Räume	117
§ 12. Die Axiome der Punktstrennung	117
1. Trennung von Mengen	117
2. Die Axiome der Punktstrennung	118
3. Folgerungen aus den Axiomen der Punktstrennung	119
4. Eigenschaften der T_0 -Räume	120
5. Assoziierte T_0 -Räume	120
6. T_0 -Räume und geordnete Mengen	123
7. Eigenschaften der T_1 -Räume	124
8. Eigenschaften der T_2 -Räume	126
§ 13. Regularität und Normalität	127
1. Schwach reguläre Räume	127
2. Reguläre Räume	128
3. Weitere Eigenschaften regulärer Räume	130
4. Normale Räume	132
5. Vollständig normale Räume	133
§ 14. Zusammenhang	139
1. Zusammenhängende Räume	139
2. Zusammenhängende Teilmengen	141
3. Die Komponentenzzerlegung	142
4. Die Quasikomponentenzzerlegung	143
5. Verschiedene Stufen der Zusammenhangslosigkeit	144
6. Lokaler Zusammenhang	147
§ 15. Topologische Charakterisierung der Zahlengeraden	150
1. Vorbemerkung	150
2. Zerlegungspunkte	151
3. Einführung einer totalen Ordnung	152
4. Charakterisierung der zusammenhängenden Ordnungstopologien	154
5. Irreduzibler Zusammenhang	155
6. Charakterisierung von E und I	156
7. Kennzeichnung der eindimensionalen Sphäre	159
8. Bogenweise zusammenhängende Räume	161
V. Stetige Funktionen und Trennungseigenschaften	163
§ 16. Der Raum der stetigen Funktionen	163
1. Vorbemerkung	163
2. Die Algebra der stetigen Funktionen	163
3. Der Verband der stetigen Funktionen	164
4. Urbildmengen reeller Funktionen	165
5. Skalen	165
6. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz	166
§ 17. Funktionale Trennbarkeit und Normalität	168
1. Funktionale Trennung	168
2. Das Urysohnsche Lemma	169
3. Erweiterungssatz von Tietze	170

§ 18. Vollständig reguläre Räume	173
1. Axiome der funktionalen Trennbarkeit	173
2. Grundeigenschaften vollständig regulärer Räume	174
3. Nullstellenmengen	176
4. Perfekt normale Räume	178
5. Schwach reguläre und normale Basen	179
§ 19. Einbettungssätze	180
1. Einbettungsbedingungen	180
2. Der Einbettungssatz von TYCHONOFF	181
3. Ein Metrisationssatz von URYSOHN	182
4. Universalräume	183
§ 20. Nachbarschaftsräume	184
1. Die Axiome der Nachbarschaftsstruktur	184
2. Nachbarschaftsrelationen und funktionale Trennbarkeit	186
VI. Kompaktheitseigenschaften	190
§ 21. Kompakte Räume	190
1. Definition der kompakten Räume	190
2. Kompaktheitskriterien	191
3. Kompakte Teilmengen	194
4. Kompaktheit geordneter Mengen	195
5. Abbildungen kompakter Räume	196
6. Extremwerte	197
7. Ultrafilter	197
8. Der Satz von TYCHONOFF	198
9. Weitere Kompaktheitsbegriffe	200
§ 22. Kompakte T_2 -Räume	202
1. Allgemeine Eigenschaften	202
2. Normalität	203
3. Stetige Abbildungen kompakter T_2 -Räume	204
4. Nulldimensionale kompakte Räume	207
§ 23. Relativierung und Lokalisation	209
1. Relativ kompakte Teilmengen	209
2. Lokalisation	209
3. Lokalkompakte T_2 -Räume	210
4. Im Unendlichen abzählbare Räume	211
5. Mannigfaltigkeiten	212
6. Klassifikation der eindimensionalen Mannigfaltigkeiten	213
§ 24. Kompakte metrische Räume	216
1. Totale Beschränktheit	216
2. Kompaktheitskriterien	217
3. Metrisationssätze	219
4. Die Cantorsche Menge	219
§ 25. Kompaktheit und Zusammenhang	223
1. Kontinua	223
2. Lokalzusammenhängende Kontinua	223
3. Überdeckungssätze	224

4. Topologische Kennzeichnung der stetigen Streckenbilder	227
5. Eine topologische Kennzeichnung des Bogens	230
6. Kriterien für die Bogenverknüpftheit	231
VII. Uniforme Räume	235
§ 26. Überdeckungsstrukturen und uniforme Räume	235
1. Vorbetrachtungen	235
2. Überdeckungsstrukturen	236
3. Uniforme Strukturen	238
4. Vergleich und Erzeugung von Überdeckungsstrukturen	240
5. Anwendungen der Erzeugung von uniformen Strukturen	243
6. Uniformisierbare Räume	246
7. Teilräume von Überdeckungsräumen	248
8. Gleichmäßig stetige Abbildungen	249
9. Assoziierte separierende Überdeckungsstrukturen	251
§ 27. Vollständige und präkompakte uniforme Räume	251
1. Cauchyfilter	251
2. Minimale Cauchyfilter	252
3. Vollständige uniforme Räume	254
4. Präkompakte Überdeckungsstrukturen	255
5. Nachbarschaftsrelationen und präkompakte uniforme Strukturen	256
6. Eine Charakterisierung der T_4 -Räume	259
§ 28. Erweiterungen, Vervollständigungen und Kompaktifizierungen	260
1. Definition der Erweiterung topologischer Räume	260
2. Erweiterungen durch offene Filter	261
3. Strikte Erweiterungen	263
4. Die maximale strikte T_0 -Erweiterung	265
5. Erweiterungen und Einbettungen	265
6. Die Alexandroffsche Kompaktifizierung	267
7. Vervollständigung einer uniformen Struktur	269
8. T_2 -Kompaktifizierungen	274
9. Die Čech-Stone-Kompaktifizierung	275
§ 29. Parakompakte Räume	278
1. Der Begriff des vollnormalen Raumes	278
2. Der Begriff des parakompakten Raumes	279
3. Der Satz von MICHAEL und STONE	280
4. Beweis des Satzes von MICHAEL und STONE	281
5. Eigenschaften parakompakter T_2 -Räume	285
§ 30. Metrisationssätze	287
1. Erzeugung einer uniformen Struktur durch Pseudometriken	287
2. Allgemeine Metrisationssätze	290
3. Anwendungen	292
VIII. Invarianz der Dimension und des Gebietes	295
§ 31. Konvexe Mengen	295
1. Einleitung	295
2. Die Ebenen euklidischer Räume	295

3. Konvexe Mengen	297
4. Simplexe	298
5. Eigenschaften konvexer Mengen	302
6. Konvexe Raumstücke	305
7. Konvexe Zellen	311
§ 32. Kombinatorische Grundbegriffe	312
1. Euklidische Komplexe	312
2. Euklidische Polyeder	314
3. Topologische Polyeder	315
4. Abstrakte Komplexe	316
5. Teilkomplexe	318
6. Isomorphie von Komplexen	319
7. Simpliciale Komplexe und Schemata	319
8. Geometrische Realisation simplicialer Komplexe	321
9. Simpliciale Abbildungen	323
10. Unterteilungen euklidischer Komplexe	326
11. Zentralunterteilungen	328
12. Baryzentrische Unterteilungen	331
13. Überdeckungssatz für kompakte Polyeder	332
14. Überdeckungssatz für nichtkompakte Polyeder	333
15. Offene Teilmengen von Polyedern	337
§ 33. Invarianz der Dimension und des Gebietes	339
1. Die Ordnung einer Überdeckung	339
2. Baryzentrische Überdeckungen	339
3. Der Pflastersatz von LEBESGUE	341
4. Die Invarianz der Dimension	343
5. Der Satz von der Gebietsinvarianz	344
6. Der Fixpunktsatz von BROUWER	347
IX. Einführung in die Dimensionstheorie	349
§ 34. Die Überdeckungsdimension	349
1. Definition der Überdeckungsdimension	349
2. Rechtfertigungssatz für kompakte Polyeder	351
3. Der dimensionstheoretische Summensatz	353
4. Die zweite Fassung des Summensatzes	357
5. Die lokale Überdeckungsdimension	359
6. Monotonie der Dimension	360
§ 35. Dimension und Trennungseigenschaften	361
1. Die n -dimensionale Trennbarkeit	361
2. Die große induktive Dimension	362
3. Die kleine induktive Dimension	367
§ 36. Der Menger-Nöbelingsche Einbettungssatz	369
1. Vorbemerkung	369
2. Die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz	369
3. Der Satz von BAIRE	370
4. \mathcal{U} -Abbildungen	371
5. Der Einbettungssatz von MENGER-NÖBELING	374
6. Dimension und \mathcal{U} -Abbildungen	376

X.	Homotopie	378
§ 37.	Freie Homotopie	378
	1. Homotope Abbildungen	378
	2. Wesentliche Abbildungen	380
	3. Zusammenziehbare Räume	381
	4. Retrakte	383
	5. Invarianz des Randes	385
§ 38.	Gebundene Homotopie	386
	1. Gebundene Homotopie	386
	2. Wesentliche Abbildungen bezüglich Teilmengen	386
	3. Stabile Werte einer Abbildung	387
	4. Dimension und wesentliche Abbildungen	388
§ 39.	Abbildungen in die Sphäre und Zerlegungssätze	390
	1. Der Homotopieerweiterungssatz	390
	2. Anwendungen auf die Dimensionstheorie	392
	3. Ein Beweis des Satzes von der Gebietsinvarianz	393
	4. Der Zerlegungssatz von BORSUK und JORDAN-BROUWER	394
	5. Lokal glatte Mannigfaltigkeiten	398
§ 40.	Topologie der Ebene	400
	1. Der Jordansche Kurvensatz	400
	2. Der Satz von SCHOENFLIESS	401
	3. Glatt begrenzte offene Mengen	410
§ 41.	Topologie der Flächen	413
	1. Flächen	413
	2. Triangulierbarkeit der Flächen	414
XI.	Homologietheorie der Komplexe	422
§ 42.	Die Homologiegruppen	422
	1. Einleitung	422
	2. Orientierte euklidische Komplexe	425
	3. Orientierte simpliziale Komplexe	426
	4. Berandungszahlen	428
	5. Bewertete Komplexe	431
	6. Ketten	432
	7. Der Randoperator	434
	8. Homologie	436
	9. Abelsche Gruppen	437
	10. Kettenkomplexe	439
	11. Direkte Summenzerlegung	440
	12. Kettenabbildungen	442
	13. Invarianz gegenüber Umorientierungen	445
	14. Allgemeine Koeffizientenbereiche	447
§ 43.	Homologiegruppen spezieller Komplexe	447
	1. Wege in Komplexen	447
	2. Zusammenhang von Komplexen	448
	3. Zusammenhang und nulldimensionale Homologiegruppen	450
	4. Reduzierte Homologiegruppen	452

5. Die Kegelkonstruktion	453
6. Graphen	457
7. Pseudomannigfaltigkeiten	461
§ 44. Die relativen Homologiegruppen	467
1. Homologie in Teilkomplexen	467
2. Direkte Summenzerlegung von Kettenkomplexen	468
3. Relative Homologie	470
4. Invarianz gegenüber Umorientierungen	475
5. Anwendungen und Beispiele	475
6. Die exakte Homologiesequenz	477
7. Anwendungen	480
8. Kettenabbildungen von Kettenkomplexpaaren	482
§ 45. Bettische Zahlen und Torsionszahlen	484
1. Freie abelsche Gruppen	484
2. Freie Kettenkomplexe	486
3. Die Torsionsgruppe und die Bettische Gruppe	487
4. Endlich erzeugbare abelsche Gruppen	488
5. Bettische Zahlen und Torsionszahlen	490
6. Berechnungsverfahren	492
7. Kanonische Basen	495
§ 46. Invarianz der Homologiegruppen bei baryzentrischen Unterteilungen	496
1. Simpliciale Abbildungen von Ketten	496
2. Homotope Kettenabbildungen	499
3. Beweis der Invarianz bei baryzentrischen Unterteilungen	501
XII. Die Čechsche Homologietheorie	505
§ 47. Die Čechschen Homologiegruppen	505
1. Vorbetrachtungen	505
2. Der inverse Limes	507
3. Abbildungen inverser Familien	509
4. Die Čechschen Homologiegruppen	512
5. Relative Čechsche Homologiegruppen	513
§ 48. Grundeigenschaften der Čechschen Homologiegruppen	517
1. Stetige Abbildungen und Homologie	517
2. Homologie und Zusammenhang	522
§ 49. Invarianz der kombinatorischen Homologiegruppen	525
1. Vorbetrachtungen	525
2. Der Invariansatz für kompakte Polyeder	526
3. Zerspaltungen eines Komplexes	527
4. Zellenerspaltungen	531
5. Unterteilungsinvarianz	534
6. Der Invariansatz für beliebige Polyeder	537
7. Abbildungen von Polyedern	538
§ 50. Klassifikation der Flächen	541
1. Kombinatorische Flächen	541
2. Polygondarstellungen der Flächen	543

3. Reduktion auf die Normalform	546
4. Veranschaulichung der Normalformen	553
5. Hauptsatz der Flächentheorie	557
§ 51. Homologie und Homotopie	559
1. Relative Homotopie	559
2. Überdeckungen des Einheitsintervalls	560
3. Geschichtete Überdeckungen	562
4. Der Homotopiesatz	564
5. Homotopie von Polyederabbildungen	565
6. Abbildungsgrad	567
7. Die Spureninvariante	571
8. Fixpunktsätze	573
9. Anwendungen auf Vektorfelder	575
XIII. Kohomologie	577
§ 52. Kombinatorische und algebraische Dualität	577
1. Duale Komplexe	577
2. Bewertungstreue Dualität	579
3. Kokettenkomplexe	581
4. Algebraische Dualität	582
5. Beziehungen zwischen kombinatorischer und algebraischer Dualität	584
§ 53. Weiterer Ausbau der Kohomologietheorie	588
1. Vorbetrachtungen	588
2. Relative Kohomologiegruppen	590
3. Anwendungen	592
4. Die Kohomologiesequenz	593
5. Reduzierte Kohomologiegruppen	597
6. Berechnung der Kohomologiegruppen	598
7. Anwendungen	602
8. Simpliciale Abbildungen und Unterteilungsinvarianz	603
XIV. Die Čech'schen Kohomologiegruppen	605
§ 54. Die Čech'schen Kohomologiegruppen	605
1. Direkte Familien	605
2. Direkter Limes	605
3. Abbildungen direkter Familien	608
4. Čech'sche Kohomologiegruppen	610
5. Exaktheit der Čech'schen Kohomologiesequenz	611
6. Kohomologiesequenzen und stetige Abbildungen	620
§ 55. Lokale Homologie und Kohomologie	623
1. Ausschnittsinvarianz	623
2. Die lokalen Kohomologiegruppen	625
3. Anwendungen auf Polyeder	626
4. Topologische Invarianz der Pseudomannigfaltigkeiten	627
5. Triangulierbare Mannigfaltigkeiten	631
6. Homologiemannigfaltigkeiten	632
7. Lokale Kohomologie und Orientierbarkeit	635

§ 56. Stetigkeitseigenschaften der Kohomologiegruppen	643
1. Inverser Limes topologischer Räume	643
2. Stetigkeit der Kohomologiegruppen	645
3. Der direkte Limes von topologischen Räumen	653
XV. Die Dualitätssätze	657
§ 57. Der Poincarésche Dualitätssatz	657
1. Normalunterteilungen abstrakter Komplexe	657
2. Normale Komplexe	660
3. Duale Sternzerspaltungen	665
§ 58. Produktbildungen in Komplexen	668
1. Produkte von simplizialen Koketten und Ketten	668
2. Übergang zu den Kohomologie- und Homologiegruppen	671
3. Übergang zu den Čechschen Gruppen	675
4. Anwendungen auf den Dualitätsoperator	677
§ 59. Der Alexandersche Dualitätssatz	684
1. Formulierung des Satzes	684
2. Kombinatorische Hilfsmittel	684
3. Durchführung des Beweises	689
4. Folgerungen	695
Literatur	698
Namenverzeichnis	707
Sachverzeichnis	709