

Inhaltsverzeichnis

Erster Abschnitt

Grundlagen

§ 1. Primzerlegung

Seite

1. Natürliche, ganze und rationale Zahlen	1
2. Elementare Teilbarkeitslehre	2
3. Die Primzahlen	4
4. Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie	6
5. Ausbau des Fundamentalsatzes	7
6. Irrationalität der n -ten Wurzeln ganzer Zahlen	12

§ 2. Größter gemeinsamer Teiler

1. Kriterium für Teilbarkeit und Primteiler	13
2. Definition des größten gemeinsamen Teilers	14
3. Definition des kleinsten gemeinsamen Vielfachen	16
4. Rechenregeln für größte gemeinsame Teiler und kleinste gemeinsame Vielfache	17
5. Teilerfremdheit und paarweise Teilerfremdheit	19
6. Reduzierte Bruchdarstellung, Hauptnennerdarstellung	20
7. Hauptsatz über den größten gemeinsamen Teiler	22
8. Beweis des Hauptsatzes als Hauptsatz über Ideale aus ganzen Zahlen	24
9. Der Euklidische Algorithmus	26
10. Anderer Beweis des Fundamentalsatzes der elementaren Zahlentheorie	28

§ 3. Vollkommene Zahlen, Mersennesche und Fermatsche Primzahlen

1. Definition der vollkommenen Zahlen	29
2. Produktformel für die Teilersumme	30
3. Hinreichende Bedingung für gerade vollkommene Zahlen: Satz von Euklid	31
4. Notwendige Bedingung für gerade vollkommene Zahlen: Satz von Euler	32
5. Die Mersenneschen Primzahlen	33
6. Ungerade vollkommene Zahlen	34
7. Die Fermatschen Primzahlen	36
8. Zusammenstellung der noch offenen Fragen	37

§ 4. Kongruenz, Restklassen

1. Definition der Kongruenz und der Restklassen	38
2. Der Restklassenring	40
3. Division im Restklassenring	42

	Seite
4. Die prime Restklassengruppe	44
5. Der kleine Fermatsche Satz	45
6. Summenformel für die Eulersche Funktion	49
7. Die Möbiusschen Umkehrformeln	50
8. Produktformel für die Eulersche Funktion	52
9. Simultane Kongruenzen, direkte Summenzerlegung des Restklassenrings ..	55
10. Kongruenz für gebrochene Zahlen	59
11. Der Restklassenkörper nach einer Primzahl	62
12. Additive Darstellung der Restklassen nach einer Primzahlpotenz	64
13. Periodizität der m -adischen Bruchentwicklung für rationale Zahlen	67

§ 5. Die Struktur der primen Restklassengruppen

1. Zurückführung auf Primzahlpotenzen	71
2. Der Fall einer Primzahl	72
3. Zur Bestimmung primitiver Wurzeln, Artinsche Vermutung	74
4. Zyklische Verschiebung der Periode in der m -adischen Bruchentwicklung	75
5. Hilfssätze über Kongruenzen nach einer Primzahlpotenz	77
6. Der Fall einer ungeraden Primzahlpotenz	78
7. Der Fall einer Potenz der Primzahl 2	83

Zweiter Abschnitt

Quadratische Reste

§ 6. Definition, Reduktion, Kriterien

1. Definition der quadratischen Reste	86
2. Reduktion auf Primzahlpotenzmoduln	87
3. Reduktion auf ungerade Primzahlmoduln	87
4. Erstes Kriterium: Legendresches Symbol	91
5. Zweites Kriterium: Eulersches Kriterium	93
6. Drittes Kriterium: Gaußsches Lemma	94

§ 7. Das quadratische Reziprozitätsgesetz: Elementarer Beweis

1. Grundfrage, Reduktion auf Primzahlen	96
2. Die beiden Ergänzungssätze	97
3. Das allgemeine Reziprozitätsgesetz	100
4. Das Legendresche Symbol als Funktion seines Nenners	105
5. Der Führer des Legendreschen Symbols als Funktion seines Nenners	107

§ 8. Das quadratische Reziprozitätsgesetz: Beweis mit Gaußschen Summen

1. Einheitswurzeln von Primzahlordnung	112
2. Gaußsche Summen	114
3. Beweis des Reziprozitätsgesetzes	116
4. Unterbauung des Beweises durch Kongruenztheorie im Einheitswurzelbereich	117
5. Beweis des zweiten Ergänzungssatzes	120

§ 9. Die Jacobische Verallgemeinerung		Seite
1. Definition des Jacobischen Symbols	123	123
2. Das Jacobische Symbol als Funktion seines Zählers	125	125
3. Ergänzungssätze und allgemeines Reziprozitätsgesetz	129	129
4. Rekursionsverfahren zur Bestimmung des Jacobischen Symbols	131	131
5. Das Jacobische Symbol als Funktion seines Nenners	135	135
6. Das Kroneckersche Symbol	141	141

§ 10. Verteilungsfragen über quadratische Reste nach einer Primzahl

1. Lösungsanzahl quadratischer Kongruenzen	145	145
2. Sequenzen mit vorgeschriebenen Restcharakteren	149	149
3. Wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung. Überblick über die Ergebnisse	151	151
4. Fall der Polynome zweiten Grades	155	155
5. Anwendung auf zweigliedrige Sequenzen	157	157
6. Fall eines speziellen Polynoms dritten Grades	159	159
7. Anwendung auf dreigliedrige Sequenzen	165	165
8. Zerlegung der Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$ in zwei Quadrate	167	167
9. Analogon für die Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{3}$	171	171

Dritter Abschnitt

Der Dirichletsche Primzahlsatz

§ 11. Elementare Sonderfälle

1. Folgerungen aus der Theorie der quadratischen Reste	176	176
2. Das Kreisteilungspolynom	180	180
3. Der Fall der Einsklasse	184	184
4. Der Fall der negativen Einsklasse	187	187

§ 12. Die Methode von Dirichlet

1. Der Eulersche Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlmenge	192	192
2. Der Dirichletsche Beweisansatz für die Moduln 3 und 4	196	196
3. Der Dirichletsche Beweisansatz für den allgemeinen Fall	200	200
4. Die Zetareihe und die Dirichletsche Wendung des Eulerschen Beweises	202	202
5. Einiges über den Primzahlsatz	205	205

§ 13. Die Charaktere endlicher abelscher Gruppen, Restklassencharaktere

1. Definition und Existenz der Charaktere	206	206
2. Charakterrelationen	208	208
3. Das Dualitätsprinzip	210	210
4. Charaktere und Untergruppen	213	213
5. Restklassencharaktere	216	216
6. Führer, eigentliche Charaktere	217	217
7. Gerade und ungerade Charaktere	224	224

§ 14. Der Beweis von Dirichlet

1. Die L-Reihen	227	227
2. Isolierung der Primzahlmengen in den einzelnen primen Restklassen	229	229

	Seite
3. Grenzverhalten der L-Reihen	232
4. Dirichletsche Dichte und natürliche Dichte	234

§ 15. Das Nichtverschwinden der L-Reihen

1. Produkte aus L-Reihen	238
2. Elementar-analytischer Beweis für nicht-quadratische Charaktere	249
3. Elementar-analytischer Beweis für quadratische Charaktere	252
4. Die funktionentheoretische Beweismethode	258
5. Die algebraisch-zahlentheoretische Beweismethode	266
A. Additive Arithmetik	274
B. Multiplikative Arithmetik	275
a) Einheiten	275
b) Primzerlegung	276
6. Elementar-arithmetische Beweise des Dirichletschen Primzahlsatzes	282

Vierter Abschnitt

Quadratische Zahlkörper

§ 16. Elementare Teilbarkeitslehre

1. Algebraische Grundlagen	283
2. Geometrische Veranschaulichung	287
3. Ganze Zahlen, Diskriminante	290
4. Einheiten	297
5. Berechnung der Grundeinheit	304
A. Algebraische Grundlagen der Kettenbruchentwicklung	305
B. Kettenbruchentwicklung reell-quadratischer Irrationalzahlen	307
C. Anwendung auf die Berechnung der Grundeinheit	311
D. Kettenbruchentwicklung reiner Quadratwurzeln	319
6. Quadratische Zahlkörper mit eindeutiger Primzahlzerlegung	323

§ 17. Divisorentheorie

1. Struktur des Restklassenrings nach einer Primzahl	337
2. Teilbarkeit und Kongruenz für Primdivisorpotenzen	345
3. Die Hauptsätze der Arithmetik	359
4. Kongruenz, Restklassen, Ideale	367
5. Endlichkeit der Klassenzahl	375

§ 18. Bestimmung der Klassenzahl

1. Die Grenzformel	388
2. Summation der L-Reihen	396
3. Die allgemeine Klassenzahlformel	400
a) K reell	402
b) K komplex	402
4. Die quadratische Klassenzahlformel	405
A. Positivität	407
B. Ganzrationalität	408
a) Imaginär-quadratische Zahlkörper	408
b) Reell-quadratische Zahlkörper	411

5. Rationale Gestalt der Klassenzahlformel für positive Primzahldiskriminanten	419
--	-----

§ 19. Quadratische Zahlkörper und quadratisches Reziprozitätsgesetz

1. Quadratische Zahlkörper als Klassenkörper	432
2. Ausblick auf die allgemeine Klassenkörpertheorie	433
3. Beweis des Reziprozitätsgesetzes durch Einbettung in Einheitswurzelkörper	437
4. Rein-quadratischer Beweis des Reziprozitätsgesetzes	440

§ 20. Systematische Theorie der Gaußschen Summen

1. Allgemeine Definition, Reduktionen	444
2. Komponentenzzerlegung, Betragformel	450
3. Begriffliche Bedeutung der eigentlichen Gaußschen Summen	453
4. Gaußsche Summen und Charaktersummen für einen ungeraden Primzahlmodul	460
5. Vorzeichenbestimmung für quadratische Charaktere	469
6. Die Kummersche Vermutung für kubische Charaktere nach einem Primzahlmodul	478
7. Analoga für bikubische und biquadratische Charaktere	489
Namenverzeichnis	495
Sachverzeichnis	497