

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
<b>Kapitel I. Einführung . . . . .</b>	<b>1</b>
§ 1. Spiegelungen in der euklidischen Ebene . . . . .	1
1. Involutorische Bewegungen S. 2. — 2. Darstellung der Bewegungen durch Spiegelungsprodukte S. 3. — 3. Das Bewegen von Bewegungen (Transformieren) S. 9. — 4. Formulierung geometrischer Beziehungen in der Bewegungsgruppe S. 11. — 5. Beweis einiger Sätze durch Rechnen mit Spiegelungen S. 13.	
§ 2. Der Begriff der metrischen Ebene . . . . .	19
1. Modelle der stetigen elliptischen Ebene S. 19. — 2. Das KLEINSche Modell der stetigen hyperbolischen Ebene S. 22. — 3. Metrische Ebenen S. 24. — 4. Formulierung der ebenen metrischen Geometrie in der Bewegungsgruppe S. 26. — 5. Beweise S. 29.	
<b>Kapitel II. Metrische (absolute) Geometrie . . . . .</b>	<b>32</b>
§ 3. Das Axiomensystem der metrischen (absoluten) Geometrie . . . . .	32
1. Involutorische Elemente einer Gruppe. Grundrelationen S. 32. — 2. Axiomensystem S. 33. — 3. Gruppenebene. Bewegungen der Gruppenebene S. 34. — 4. Erste Folgerungen aus dem Axiomensystem S. 37. — 5. Das Im-Büschel-Liegen S. 40. — 6. Lotensatz S. 42. — 7. Darstellung einer Bewegung S. 44. — 8. Gerade und ungerade Bewegungen. Axiom vom Polardreieck S. 46. — 9. Punkt-Geraden-Analogie S. 48. — 10. Fixgeraden und Fixpunkte einer Bewegung S. 51. — 11. Existenz von Punkten und Geraden S. 55.	
§ 4. Sätze der metrischen Geometrie . . . . .	56
1. Mittelsenkrechtensatz S. 56. — 2. Höhensatz S. 57. — 3. Fußpunktsatz S. 59. — 4. Transitivitätssatz S. 62. — 5. Geradenbüschel S. 64. — 6. Winkelhalbierendensatz S. 67. — 7. Lemma von den neun Geraden S. 67. — 8. Gegenpaarung S. 68. — 9. Satz von PAPPUS-BRIANCHON S. 71. — 10. Seitenhalbierendensatz S. 74.	
§ 5. Projektive und projektiv-metrische Ebenen . . . . .	76
1. Projektive Ebenen S. 76. — 2. Projektive Geometrie der eindimensionalen Grundgebilde S. 82. — 3. Ebene projektive Kollineationen S. 85. — 4. Korrelationen, Polaritäten S. 88. — 5. Projektiv-metrische Ebenen S. 89. — 6. Die Rechtwinkelinvolution S. 91.	
§ 6. Begründung der metrischen Geometrie . . . . .	93
1. Halbdrehungen der Geraden S. 94. — 2. Die durch Halbdrehungen bewirkten Büschelabbildungen S. 97. — 3. Zur Definition der Halbdrehung S. 99. — 4. Erweiterung der Gruppenebene zur Idealebene S. 101. — 5. Die Idealebene einer Bewegungsgruppe S. 103. — 6. Die von den Halbdrehungen um einen Idealpunkt erzeugte Gruppe S. 107. — 7. Die Axiome der euklidischen und der nichteuklidischen Metrik S. 109.	

8. Metrisch-euklidische Ebenen S. 110. — 9. Die absolute Polar-Involution in der Idealebene einer metrisch-euklidischen Bewegungsgruppe S. 114. — 10. Die absolute Polarität in der Idealebene einer metrisch-nichteuklidischen Bewegungsgruppe S. 115. — 11. Haupt-Theorem S. 120. — 12. Euklidische und elliptische Bewegungsgruppen S. 121. Note über freie Beweglichkeit . . . . .	124
§ 7. Über das Transitivitätsgesetz für beliebige involutorische Elemente . . . . .	127
1. Gesetze über beliebige involutorische Elemente, welche in den metrisch-nichteuklidischen Bewegungsgruppen gelten S. 127. — 2. Über die axiomatische Kennzeichnung der elliptischen Bewegungsgruppen S. 130. — 3. Bündel von involutorischen Elementen S. 132. — 4. Zweispiegelige Gruppen, in denen das Transitivitätsgesetz gilt S. 133. — 5. Die THOMSEN-Relation S. 135. Note über die Algebraisierung der affinen und projektiven Ebenen . . . . .	137
<b>Kapitel III. Projektiv-metrische Geometrie . . . . .</b>	
§ 8. Projektiv-metrische Koordinatenebenen und metrische Vektorräume . . . . .	141
1. Projektive und projektiv-metrische Koordinatenebenen S. 141. — 2. Vektorräume S. 144. — 3. Metrische Vektorräume und orthogonale Gruppen S. 146. — 4. Projektiv-metrische Ebenen und metrische Vektorräume S. 151. — 5. Über den Satz von den drei Spiegelungen S. 154.	
§ 9. Orthogonale Gruppen . . . . .	157
1. Überblick S. 157. — 2. Ein Lemma S. 159. — 3. Die Gruppen $O_3^+(K, F)$ mit binärer nullteiler Form S. 160. — 4. Die Gruppen $O_3^+(K, F)$ mit binärer nullteiler Form als euklidische Bewegungsgruppen S. 163. — 5. Die Gruppen $O_3^+(K, F)$ mit ternärer nullteiler Form S. 164. — 6. Die Gruppen $O_3^+(K, F)$ mit ternärer nullteiler Form als elliptische Bewegungsgruppen S. 165. — 7. Die Gruppen $O_3^+(K, F)$ mit beliebiger ternärer Form S. 166. — 8. Gesetze über die involutorischen Elemente der Gruppe $O_3^+(K, F)$ mit ternärer, nicht nullteiler Form S. 168.	
§ 10. Darstellung metrischer Vektorräume und ihrer orthogonalen Gruppen mit Hilfe hyperkomplexer Systeme . . . . .	170
1. Normierte ternäre Formen S. 170. — 2. Quaternionen S. 174. — 3. Die Norm einer eigentlich-orthogonalen Transformation S. 178. — 4. Zweireihige Matrizen über $K$ . Die lineare Gruppe $L_2(K)$ S. 180. — 5. Konstruktion metrisch-nichteuklidischer Bewegungsgruppen S. 183.	
§ 11. Die Bewegungsgruppen der hyperbolischen projektiv-metrischen Ebenen als abstrakte, aus ihren involutorischen Elementen erzeugte Gruppen ( $H$ -Gruppen) . . . . .	186
1. Das Axiomensystem der $H$ -Gruppen S. 187. — 2. Bündel von involutorischen Elementen. Folgerungen aus der Grundannahme und Axiom T S. 188. — 3. Enden. Folgerungen aus den Axiomen $\sim V$ , $UV_1$ , $UV_2$ S. 189. — 4. Endenrechnung S. 191. — 5. Darstellung durch gebrochen-lineare Transformationen S. 195. — 6. Zusammenfassung S. 198. — 7. Eine spezielle Klasse von involutorischen Elementen der $H$ -Gruppen S. 198.	
<b>Kapitel IV. Euklidische Geometrie . . . . .</b>	
§ 12. Der Satz von PAPPUS-PASCAL in der euklidischen Geometrie . . . . .	201
1. Axiome und erste Folgerungen S. 201. — 2. Hilfssätze über parallele Geraden S. 202. — 3. Sechs Beweise des Satzes von PAPPUS-PASCAL S. 205.	

§ 13. Algebraische Darstellung der euklidischen Bewegungsgruppen . . . . .	210
1. Darstellung der euklidischen Bewegungsgruppen als Bewegungsgruppen euklidischer Koordinatenebenen S. 210. — 2. Spezielle euklidische Bewegungsgruppen S. 215.	
<b>Kapitel V. Hyperbolische Geometrie . . . . .</b>	
§ 14. Hyperbolische Bewegungsgruppen . . . . .	219
1. Die Axiome der hyperbolischen Bewegungsgruppen S. 219. — 2. Enden S. 221. — 3. Das BERGAUSCHE Lemma vom Ende S. 222. — 4. Verbindbarkeit der Enden S. 224. — 5. Hyperbolische Bewegungsgruppen und <i>H</i> -Gruppen S. 226. — 6. Forderungen, die mit dem hyperbolischen Axiom <i>H</i> äquivalent sind S. 229.	
§ 15. Darstellung der hyperbolischen Bewegungsgruppen durch binäre lineare Gruppen . . . . .	231
1. Darstellung der hyperbolischen Bewegungsgruppen S. 231. — 2. Hyperbolische Bewegungsgruppen, in denen jede Gerade Enden angehört S. 236.	
<b>Kapitel VI. Elliptische Geometrie . . . . .</b>	
§ 16. Begründung der elliptischen Geometrie . . . . .	239
1. Elliptische Bewegungsgruppen und ihre Gruppenebenen S. 239. — 2. Der Satz von PAPPUS-PASCAL S. 241. — 3. Darstellung einer elliptischen Bewegungsgruppe als Bewegungsgruppe einer projektiv-metrischen Ebene S. 243.	
§ 17. Der Gruppenraum einer elliptischen Bewegungsgruppe . . . . .	244
1. Büschel und Drehgruppen S. 244. — 2. Räumliche projektive Inzidenzaxiome S. 245. — 3. Der Gruppenraum S. 246. — 4. Rechts- und Linksparellismus. CLIFFORDSche Flächen S. 250. — 5. Beweis des Satzes von PAPPUS-PASCAL aus räumlichen Tatsachen S. 252. — 6. Die Quadrate in einer elliptischen Bewegungsgruppe. Das Beweglichkeitsaxiom S. 256. — 7. Bewegungen des Gruppenraumes S. 259. — 8. Erzeugbarkeit von CLIFFORD-Flächen durch Rotation S. 262. — 9. Halbdrehungen in der Gruppenebene und Schiebungen im Gruppenraum S. 265. — 10. Deutung des Gruppenraumes in der Gruppenebene S. 268. — 11. Ein Satz von BAER S. 271.	
<b>Anhang . . . . .</b>	
§ 18. Über die metrischen Bewegungsgruppen . . . . .	275
1. Über verschiedene Erzeugendensysteme derselben Gruppe S. 275. — 2. Die projektiv-metrischen Bewegungsgruppen S. 277. — 3. Die vollständigen metrischen Bewegungsgruppen S. 277. — 4. Metrische Unter-Bewegungsgruppen S. 278. — 5. Zugehörige metrische Unter-Bewegungsgruppen S. 279. — 6. Beispiele S. 280.	
§ 19. Metrisch-euklidische Ebenen . . . . .	286
1. Geometrische Kennzeichnung metrisch-euklidischer Teilebenen S. 286. — 2. Algebraische Kennzeichnung metrisch-euklidischer Teilebenen S. 288. — 3. Metrisch-euklidische Teilebenen mit freier Beweglichkeit S. 293. — 4. Metrisch-euklidische Unter-Bewegungsgruppen S. 295.	
Literatur . . . . .	297
Zusammenstellung besonderer Zeichen . . . . .	303
Axiomentafel . . . . .	304

**Anmerkungen** . . . . . 305

1. Axiomensystem der metrischen Ebenen S. 305. — 2. Höhensatz S. 305. — 3. Gegenpaarungssatz S. 306. — 4. Rechtseitsatz S. 306. — 5. Zur Definition der Idealgeraden und der absoluten Polarität in der Idealebene S. 307. — 6. Abhängigkeit des Axioms UV 2 im Axiomensystem der  $H$ -Gruppen S. 309. — 7. Elliptische Geometrie S. 310. — 8. Zum Begriff „total ganzzahlig-einschließbar“ S. 310.

**Supplement** . . . . . 311

## § 20. Ergänzungen und Hinweise auf die Literatur . . . . . 311

1. Involutorisch erzeugte Gruppen S. 313. — 2. Geometrie involutorischer Gruppenelemente S. 314. — 3. Axiomensystem der ebenen absoluten Geometrie S. 318. — 4. Kleine Axiome, Axiomensystem des Senkrechtstehens, Hjelmlev-Gruppen S. 318. — 5. Nicht-elliptische Hjelmlev-Gruppen S. 323. — 6. Minkowskische Gruppen S. 328. — 7.  $S$ -Gruppen S. 330. — 8. Orthogonale und projektiv-orthogonale Gruppen S. 333. — 9.  $n$ -dimensionale absolute Geometrie S. 335. — 10. Eigentlichkeitsbereiche und vollständige Spiegelungsgruppen metrischer Vektorräume S. 338. — 11. Gruppentheoretische Kennzeichnung orthogonaler Gruppen S. 340. — 12. Kinematische Räume S. 342. — 13. Hilbert-Ebenen S. 345. — 14. Modelle der absoluten Geometrie S. 349. — 15. Der Satz von der dritten Quasispiegelung S. 354.

Neuere Literatur . . . . . 358

Namen- und Sachverzeichnis . . . . . 366