
Inhaltsverzeichnis

A.	Allgemeine Vorbemerkungen	13
1.	Gegenstand der Untersuchung	13
2.	Erkenntnistheoretisches. Axiomatisierung	14
3.	Literatur	15
B.	Logische Grundbegriffe. Mengen, Abbildungen, Relationen	17
1.	Logische Grundbegriffe	17
2.	Mengen	18
2.1.	Mengenbegriff	18
2.2.	Operationen mit Mengen	19
2.3.	Rechenregeln	21
	Aufgaben	23
3.	Abbildungen	24
3.1.	Grundbegriffe	24
3.2.	Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen	25
3.3.	Zusammensetzung von Abbildungen. Diagramme	26
3.4.	Graph einer Funktion. Kartesisches Produkt	28
4.	Relationen und Operationen	29
4.1.	Binäre Relationen	29
4.2.	Äquivalenzrelationen	31
4.3.	Mächtigkeit	33
4.4.	n -stellige Relationen	34
4.5.	Operationen	35
	Aufgaben	36
C.	Geometrie	37
1.	Synthetischer Aufbau der Geometrie	37
2.	Analytischer Aufbau der Geometrie	41
2.1.	Allgemeines	41
2.2.	Analytische Geometrie der Geraden	44
2.2.1.	Koordinaten	44
2.2.2.	Orientierung der Geraden	47
2.2.3.	Teilverhältnis	48
2.2.4.	Gruppenbegriff	50

2.2.5.	Schwerpunkt. Baryzentrische Koordinaten	52
	Aufgaben	53
2.2.6.	Permutationen. Homomorphie und Isomorphie von Gruppen	53
2.3.	Analytische Geometrie der Ebene. Vektorrechnung	57
2.3.1.	Koordinaten in der Ebene	57
2.3.2.	Geraden der Ebene	58
2.3.3.	Parallelität von Geraden	60
2.3.4.	Geradenbüschel	61
2.3.5.	Zusammenhang mit linearen Gleichungen	62
	Aufgaben	64
2.3.6.	Vektoren	64
2.3.6.1.	Definition der Vektoren	64
2.3.6.2.	Addition von Vektoren	66
2.3.6.3.	Multiplikation von Vektoren mit Zahlen	68
2.3.6.4.	Kollinearität	69
2.3.7.	Koordinaten, Ortsvektoren	70
2.3.8.	Translationen	72
2.3.9.	Geradengleichung in Parameterform	73
2.3.10.	Schwerpunkt. Baryzentrische Koordinaten	74
	Aufgaben	76
2.3.11.	Anwendungen baryzentrischer Koordinaten	77
2.3.11.1.	Ein Hilfssatz	77
2.3.11.2.	Satz von CEVA	79
2.3.11.3.	Satz von MENELAOS	80
	Aufgabe	82
2.3.12.	Skalarprodukt	82
2.3.13.	Kovariante und kontravariante Koordinaten	85
2.3.14.	Längenquadrat. Quadratische Formen. Winkel zwischen Vektoren	88
	Aufgaben	89
2.3.15.	Orientierung der Ebene	90
2.3.16.	Orientierter Flächeninhalt	93
2.3.17.	HESSISCHE Normalform der Geradengleichung	95
	Aufgaben	96
2.4.	Elementare analytische Geometrie des Raumes	96
2.4.1.	Vektoren im Raum. Koordinaten	96
2.4.2.	Ebenengleichung	99
2.4.3.	HESSISCHE Normalform der Ebenengleichung	102
	Aufgaben	103
2.4.4.	Parallelität von Ebenen	103
2.4.5.	Geraden im Raum	104
2.4.6.	Ebenenbüschel	105
2.4.7.	Ebenenbündel. Geradenbündel	106
	Aufgaben	108
2.4.8.	Orientierung des Raumes	108
2.4.9.	Vektorprodukt	109
2.4.10.	Spatprodukt	112
2.4.11.	Entwicklungssätze	114
	Aufgaben	115
3.	Einführung des n -dimensionalen Raumes	116
3.1.	Vektorraum	116
3.1.1.	Definition	116
3.1.2.	Folgerungen aus den Axiomen	117
3.1.3.	Untervektorraum	119

3.1.4.	Abhängigkeit	119
3.1.5.	Folgerungen aus den Abhängigkeitssätzen	123
3.1.6.	Basis eines Vektorraumes	126
	Aufgaben	126
3.2.	Affiner Raum	127
3.2.1.	Definition des affinen Raumes	127
3.2.2.	Affiner Unterraum	128
3.2.3.	Koordinatensystem	128
3.2.4.	Parameterdarstellung affiner Unterräume	129
3.2.5.	Parallelität	130
	Aufgaben	131
D.	Lineare Gleichungssysteme. Matrizen und Determinanten	132
1.	Begriff des linearen Gleichungssystems. Matrizen	132
2.	Lineare Abbildungen und Matrizen	133
2.1.	Lineare Abbildungen	134
2.2.	Vektorraum der linearen Abbildungen. Matrizenaddition	135
2.3.	Hintereinanderausführung linearer Abbildungen. Matrizenmultiplikation	136
2.4.	Zusammenfassung	138
3.	GAUSSsches Eliminationsverfahren	140
	Aufgaben	142
4.	Rang	143
5.	Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme	145
6.	Struktur der Lösung	147
	Aufgaben	150
7.	Beschreibung von Vektorräumen und affinen Räumen durch lineare Gleichungssysteme	151
	Aufgabe	153
8.	Lineare Funktionale	153
9.	Isomorphie und Homomorphie von Vektorräumen	156
10.	Reguläre Matrizen	158
11.	Umformung von Matrizen auf Dreiecks- und auf Diagonalgestalt	161
12.	Elementarteilersatz	162
	Aufgaben	165
13.	Determinanten	166
13.1.	Motivierung. Allgemeiner Determinantenbegriff	166
13.2.	Folgerungen aus der allgemeinen Determinantendefinition	166
13.3.	Gerade und ungerade Permutationen	168
13.4.	Explizite Determinantendefinition	170
13.5.	CRAMERSche Regel	173
13.6.	Multiplikationssatz	173
13.7.	LAPLACEScher Entwicklungssatz	174

13.8.	Adjunktenmatrix	176
13.9.	Rangbestimmung mittels Determinanten	177
	Aufgaben	178
E.	Koordinatentransformationen. Affine und lineare Abbildungen. Orientierung	179
1.	Koordinatentransformationen	179
1.1.	Übergang zu einer neuen Basis im Vektorraum. Transformation der Vektorkoordinaten	179
1.2.	Transformation der Punktkoordinaten	181
2.	Affine Abbildungen	183
2.1.	Begriff der affinen Abbildung	183
2.2.	Geometrische Eigenschaften affiner Abbildungen	184
2.2.1.	Verschiedene geometrische Eigenschaften	184
2.2.2.	Geometrische Charakterisierung affiner Abbildungen	186
2.3.	Bestimmung einer affinen Abbildung durch $n + 1$ Punkte	190
	Aufgaben	191
3.	Orientierung und Koordinatentransformation	192
3.1.	Synthetische Definition der Orientierung	192
3.2.	Analytische Charakterisierung der Orientierung	193
3.3.	Anwendung auf die Flächeninhalts- und Volumenberechnung	196
	Aufgaben	197
4.	Lineare Abbildungen	197
4.1.	Beschreibung einer linearen Abbildung bezüglich einer beliebigen Basis	198
4.2.	Übergang zu neuen Basen	199
4.3.	Äquivalenz von Matrizen	201
4.4.	Ähnlichkeit von Matrizen	202
4.5.	Eigenwertproblem	204
4.5.1.	Motivierung. Charakteristische Gleichung	204
4.5.2.	Satz von CAYLEY-HAMILTON	207
4.5.3.	Eigenraum. Vielfachheit von Eigenwerten	209
	Aufgaben	214
4.6.	Nichtdiagonalisierbare Matrizen. Direkte Summe von Vektorräumen. JORDANSche Normalform	214
4.6.1.	Invariante Unterräume	215
4.6.2.	Direkte Summe	216
4.6.3.	JORDANSche Normalform	221
	Aufgaben	226
4.6.4.	Beweis für die Existenz der JORDANSchen Normalform	226
	Aufgaben	233
F.	Metrische Geometrie. Quadratische Formen	234
1.	Metrischer Raum	234
2.	Skalarprodukt	236
3.	SCHMIDTsches Orthogonalisierungsverfahren	238
4.	Totalsenkrechte Vektorräume	239

5.	Bewegungen	241
5.1.	Begriff der Bewegung	241
5.2.	Geradentreue. Affinität	241
5.3.	Eigentliche und uneigentliche Bewegungen	242
5.4.	Translationen	243
5.5.	Drehungen	243
5.6.	Orthogonale Matrizen	244
5.7.	Geometrische Deutung	245
5.8.	Drehachse	246
5.9.	Eigenwerte einer orthogonalen Matrix	248
	Aufgaben	248
6.	Quadratische Formen	249
6.1.	Begriffsbestimmung. Beispiele	249
6.2.	Definitheit	250
6.3.	Matrizenschreibweise. Koordinatentransformation	251
6.4.	Hauptachsentransformation	251
6.4.1.	Eigenwerte einer symmetrischen Matrix	252
6.4.2.	Hauptachsensatz	252
6.4.3.	Orthogonalität der Eigenvektoren	255
6.4.4.	Praktische Durchführung der Hauptachsentransformation. Beispiele	255
6.5.	Kriterien für die Definitheit quadratischer Formen	258
6.5.1.	Zusammenhang mit den Eigenwerten	258
6.5.2.	SYLVESTERSches Definitheitskriterium	259
6.5.3.	SYLVESTERSches Trägheitsgesetz	260
6.6.	Anwendung der Hauptachsentransformation auf affine Abbildungen	262
7.	Komplexe Geometrie. HERMITESche Formen	263
	Aufgaben	264
G.	Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Anfangsgründe der projektiven Geometrie	265
1.	Kurven zweiter Ordnung	265
1.1.	Definition	265
1.2.	Normalformen	265
1.3.	Klassifikation	267
1.4.	Bestimmung von Drehwinkel und Mittelpunkt	268
1.5.	Einige allgemeine Eigenschaften von Kurven zweiter Ordnung	270
1.5.1.	Geraden auf Kurven zweiter Ordnung	270
1.5.2.	Bestimmung einer Kurve zweiter Ordnung	271
1.6.	Nähere Untersuchung der eigentlichen Kegelschnitte	272
1.6.1.	Ellipse und Hyperbel	272
1.6.2.	Parabel	273
1.6.3.	Scheitelgleichung der Kegelschnitte	274
1.6.4.	Polarkoordinaten	276
1.7.	Pol und Polare	276
	Aufgaben	278
2.	Projektive Geometrie	278
2.1.	Einführung der projektiven Ebene	278
2.2.	Dualität	279
2.3.	Projektiver Raum	280

2.4.	Projektive Abbildungen	281
2.5.	Projektive Skala auf einer Geraden	282
2.6.	Doppelverhältnis	283
	Aufgabe	283
2.7.	Bestimmung einer projektiven Abbildung	283
2.8.	Trennende Punktepaare. Charakterisierung projektiver Abbildungen	284
2.9.	Korrelationen	286
3.	Kegelschnitte in der projektiven Ebene	286
3.1.	Polarverwandtschaft	286
3.2.	Konjugierte Durchmesser	288
3.3.	Anwendung des Doppelverhältnisses	289
3.3.1.	Invarianz des Doppelverhältnisses beim Projizieren	289
3.3.2.	Satz vom vollständigen Vierseit	290
3.3.3.	Konstruktion des 4. harmonischen Punktes	291
3.3.4.	Anwendung des Doppelverhältnisses auf eine involutorische Projektivität	292
3.4.	Projektive Klassifikation der Kegelschnitte	292
3.5.	Kurven zweiter Klasse	294
	Aufgaben	295
4.	Flächen zweiter Ordnung	295
4.1.	Definition. Normalformen	295
4.2.	Gestaltliche Verhältnisse	296
4.3.	Geradenscharen	298
4.4.	Klassifikation	299
4.5.	Polarverwandtschaft	300
	Sachwortverzeichnis	303