

# Inhaltsverzeichnis

## Erstes Kapitel: **Metrische Geometrie und Topologie**

### **§ 1. Grundbegriffe der metrischen Geometrie**

Begriff des metrischen Raumes . . . . .	1
Teilräume . . . . .	1
Isometrie . . . . .	2
Der euklidische Raum . . . . .	3
Der sphärische Raum . . . . .	4
Der hyperbolische Raum . . . . .	5
Lineare metrische Räume . . . . .	8
Das metrische Produkt . . . . .	9

### **§ 2. Die Topologie des metrischen Raumes**

Umgebungen . . . . .	11
Die topologische Struktur eines metrischen Raumes. . . . .	11
Topologisch äquivalente Metriken . . . . .	12
Topologie in Teilräumen. . . . .	14
Das Innere und die Begrenzung . . . . .	15
Der allgemeine Umgebungsbegriff . . . . .	16

### **§ 3. Abgeschlossene Mengen**

Die abgeschlossene Hülle . . . . .	17
Abgeschlossene Mengen . . . . .	18
Dichte Mengen . . . . .	19
Die Abweichung zweier Mengen . . . . .	19
Normalität . . . . .	21

### **§ 4. Vollständige Räume**

Konvergenz . . . . .	22
Konvergenz in Produkträumen . . . . .	23
Cauchysche Folgen . . . . .	24
Vollständige Räume . . . . .	25
Vervollständigung eines Raumes . . . . .	27

### **§ 5. Kompakte und finit kompakte Räume**

Häufungspunkte . . . . .	30
Kompakte Mengen . . . . .	31
Totalbeschränkte Mengen . . . . .	33
Separable Räume . . . . .	35
Überdeckungssätze . . . . .	37
Finit kompakte Räume . . . . .	39
Lokal kompakte Räume . . . . .	41

### **§ 6. Zusammenhang**

Zusammenhängende Mengen . . . . .	43
Beispiele zusammenhängender Räume. . . . .	46

Komponentenzerlegung . . . . .	47
Lokal zusammenhängende Räume . . . . .	48

### § 7. Der abgeschlossene Limes

Unterer und oberer abgeschlossener Limes . . . . .	50
Grundeigenschaften der abgeschlossenen Konvergenz . . . . .	50
Die Busemannsche Metrik . . . . .	53
Die Hausdorffsche Metrik . . . . .	56

## Zweites Kapitel: Stetige Abbildungen

### § 8. Grundeigenschaften der stetigen Abbildungen

Definition . . . . .	58
Allgemeine Sätze über stetige Abbildungen . . . . .	59
Stetige Abbildungen kompakter Räume . . . . .	61
Stetige Abbildungen zusammenhängender Räume . . . . .	63
Stetige Abbildungen von Produkträumen . . . . .	63

### § 9. Stetige und gleichmäßige Konvergenz

Konvergenz von Abbildungsfolgen . . . . .	63
Stetige Konvergenz . . . . .	64
Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	65
Lokal gleichmäßige Konvergenz . . . . .	68
Konvergenz der Graphen . . . . .	69
Eine Ummetrisierung lokal kompakter Räume . . . . .	74
Separabilitätsbedingungen . . . . .	76

### § 10. Gleichgradig stetige Familien

Begriff der gleichgradigen Stetigkeit . . . . .	78
Der Satz von Ascoli . . . . .	79
Gleichmäßig beschränkte Familien . . . . .	81
Dehnungsbeschränkte Abbildungen . . . . .	82

### § 11. $T$ - und $F$ -Räume

Topologische Äquivalenz von Abbildungen . . . . .	82
Die Frechetsche Äquivalenz . . . . .	83
Metrisierung des Raumes der $F$ -Räume . . . . .	84
Mehrfache Punkte . . . . .	87
Stetige Abbildungen von $T$ - und $F$ -Räumen . . . . .	87

### § 12. Kurven

Die Kurventypen . . . . .	88
Die Endpunkte . . . . .	88
Nichtausgeartete Parameterdarstellungen . . . . .	89
Geschlossene Kurven . . . . .	94
Orientierung . . . . .	95
Zerlegungen und Zusammensetzungen von Kurven . . . . .	98

## Drittes Kapitel: Die innere Metrik

### § 13. Die Länge einer Kurve

Vorbereitende Betrachtungen . . . . .	99
Die Kurvenlänge . . . . .	100
Die Länge als Parameter . . . . .	103

Differenzierbarkeitseigenschaften . . . . .	106
Parameterfreie Kennzeichnung der Kurvenlänge . . . . .	109
Die Länge geschlossener Kurven . . . . .	111

#### § 14. Der Raum der rektifizierbaren Kurven

Kompaktheitskriterien . . . . .	112
Die Längenkonvergenz . . . . .	114

#### § 15. Die innere Metrik

Finis bogenverknüpfte Räume . . . . .	116
Die innere Metrik . . . . .	118
Räume mit innerer Metrik . . . . .	121
Die innere Geometrie . . . . .	122

#### § 16. Finslersche Räume

Erzeugung von inneren Metriken . . . . .	123
Topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	127
Finslersche Mannigfaltigkeiten . . . . .	129
Die Metrik in einem Finslerschen Raum . . . . .	130

### Viertes Kapitel: Theorie der Kürzesten

#### § 17. Kürzeste

Definition und allgemeine Eigenschaften . . . . .	140
Existenzsätze . . . . .	141
Konvergenz von Kürzesten . . . . .	142
Polygone . . . . .	143
Anwendungen und Beispiele . . . . .	145

#### § 18. Konvexität

Die Zwischenbeziehung . . . . .	146
Konvexitätsbegriffe . . . . .	147
Konvexe Teilmengen . . . . .	151
Einfach konvexe Räume . . . . .	152
Fastkonvexe Räume . . . . .	154
Sphärische Umgebungen in fastkonvexen Räumen . . . . .	157

#### § 19. Metrische Singularitäten

Durchgangs- und Fluchtpunkte . . . . .	160
Verzweigungspunkte . . . . .	162

#### § 20. Geodätische

Geodätische Kurven . . . . .	164
Geodätische Strahlen . . . . .	165
Geodätische . . . . .	167

#### § 21. Absolute konjugierte Punkte

Geraden und Kreise . . . . .	168
Existenz gerader Strahlen . . . . .	169
Absolute konjugierte Punkte . . . . .	172
Die Schale eines Punktes . . . . .	173
Eindeutigkeit der Kürzesten im Kleinen . . . . .	174

## § 22. Konvergenz von geodätischen Kurven und Strahlen

Konvergenz von geodätischen Kurven . . . . .	178
Konvergenz von geodätischen Strahlen . . . . .	179

## § 23. Lote und die Konvexität der Vollsphären

Fußpunkte und Lote . . . . .	182
Konvexe Umgebungen . . . . .	183

## Fünftes Kapitel: Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume

### § 24. Deformationen

Homotopie . . . . .	186
Zusammenziehbare Räume . . . . .	188
Isotopie . . . . .	189

### § 25. Die Fundamentalgruppe

Homotopie von Kurven . . . . .	193
Die Fundamentalgruppe . . . . .	194
Die freie Homotopie . . . . .	196
Einfach zusammenhängende Räume . . . . .	198

### § 26. Relative Kürzeste

Definition der relativen Kürzesten . . . . .	201
Der Existenzsatz von J. HADAMARD . . . . .	203

### § 27. Überlagerungsräume

Lokal isometrische Abbildungen . . . . .	204
Metrische Eigenschaften der Überlagerungsräume . . . . .	206
Überlagerungsräume und Fundamentalgruppe . . . . .	210

### § 28. Der universelle Überlagerungsraum

Existenz von universellen Überlagerungsräumen . . . . .	214
---	-----

### § 29. Decktransformationen

Die Gruppe der Decktransformationen . . . . .	220
Quotientenräume . . . . .	223
Raumgruppen . . . . .	224
Ein Existenzsatz für geschlossene geodätische Kurven . . . . .	227
Fundamentaltbereiche . . . . .	228
Normalbereiche . . . . .	233

## Sechstes Kapitel: Existenzsätze für geodätische Kurven

### § 30. Komplexe und Polyeder

Simplexe . . . . .	236
Komplexe . . . . .	238
Polyeder . . . . .	238
Triangulierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	239
Isomorphe Komplexe . . . . .	242
Die baryzentrische Unterteilung . . . . .	245
Die Zylinderkonstruktion . . . . .	247

### § 31. Absolute Umgebungsretrakte

Retraktionseigenschaften der Polyeder . . . . .	249
Retraktionseigenschaften des Raumes der stetigen Wege . . . . .	253
Absolute Umgebungsretrakte und Zusammenziehbarkeit. . . . .	255
Der $n$ -dimensionale Zusammenhang . . . . .	258
Zusammenziehbarkeit und $n$ -dimensionaler Zusammenhang . . . . .	259

### § 32. Kategorie einer Menge

Grundeigenschaften der Kategorie . . . . .	263
Existenz von nicht zusammenziehbaren Mengen in $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ und $\mathfrak{C}_0$ . . . . .	266

### § 33. Existenzsätze für geodätische Kurven

$\mathfrak{Q}$ -Deformationen . . . . .	268
$\mathfrak{Q}'$ -Deformationen . . . . .	271
Wesentliche Werte und Minimalmengen . . . . .	272
Anwendung der Theorie der Kategorie . . . . .	274
Abschluß des Existenzbeweises . . . . .	277

### § 34. Anwendungen des Spernerschen Lemmas

Das Lemma von SPERNER. . . . .	280
Die Nichtzusammenziehbarkeit der $n$ -Sphäre. . . . .	281
Die Invarianz der Dimension . . . . .	283
Ein Satz von A. D. ALEXANDROW . . . . .	286

## Siebentes Kapitel: Theorie der Krümmung

### § 35. Der Winkelbegriff in metrischen Räumen

Richtungen und Winkel im euklidischen Raum . . . . .	289
Dreieckswinkel in metrischen Räumen . . . . .	290
Der obere Winkel . . . . .	291
Der Raum der Richtungen . . . . .	296
Der Winkel zwischen Kurven . . . . .	296
Winkel in Minkowskischen Räumen. . . . .	298
Winkel in Finslerschen und Riemannschen Räumen. . . . .	302

### § 36. Räume beschränkter Krümmung

Vorbereitende Betrachtungen . . . . .	308
Gebiete der Krümmung $\leq K$ bzw. $\geq K$ . . . . .	310
Grundeigenschaften der Räume beschränkter Krümmung . . . . .	311
Beispiele . . . . .	313

### § 37. Räume beschränkter Riemannscher Krümmung

Eine Monotonieeigenschaft des Dreieckswinkels . . . . .	314
Räume beschränkter Riemannscher Krümmung . . . . .	316
Der Fall der nach unten beschränkten Riemannschen Krümmung . . . . .	317

### § 38. Winkelexistenz im starken Sinne

Existenz des Winkels im starken Sinne bei einer Krümmung $\leq K$ . . . . .	320
Der Satz vom Nebenwinkel im Falle der Krümmung $\leq K$ . . . . .	323
Existenz des Winkels im starken Sinne bei einer Krümmung $\geq K$ . . . . .	324
Lote und rechte Winkel . . . . .	327

<b>§ 39. Der Dreiecksexzeß</b>	
Definition der Exzesse . . . . .	328
Der Fall der nach oben beschränkten Krümmung . . . . .	329
Der Fall der nach unten beschränkten Krümmung . . . . .	334
Eine Charakterisierung der Riemannschen Krümmung durch den absoluten Exzeß . . . . .	337
Rechtfertigungssätze . . . . .	342
<b>§ 40. Der Richtungsraum in Räumen beschränkter Krümmung</b>	
Sätze über die Winkelkonvergenz. . . . .	344
Existenz der Winkel zwischen Kurven . . . . .	346
Die Winkelmetrik im Richtungsraum . . . . .	348
Schlußbemerkungen . . . . .	353
<b>Achtes Kapitel: Das Clifford-Kleinsche Raumformenproblem</b>	
<b>§ 41. Räume konstanter Riemannscher Krümmung</b>	
Definitionen und Grundeigenschaften . . . . .	354
Eine Kennzeichnung der Mannigfaltigkeiten konstanter Riemannscher Krümmung . . . . .	355
Das Clifford-Kleinsche Raumformenproblem . . . . .	359
Die einfach zusammenhängenden Raumformen. . . . .	361
Das Lösungsverfahren . . . . .	363
<b>§ 42. Die geschlossenen euklidischen Raumformen</b>	
Allgemeine Eigenschaften der kongruenten Abbildungen . . . . .	364
Die Translationsuntergruppen der Raumgruppen . . . . .	367
Die rotativen Bestandteile der Raumgruppen . . . . .	371
Raumgruppen, die zu geschlossenen Raumformen gehören . . . . .	371
Die Berechnung der Raumgruppen . . . . .	376
Die zweidimensionalen geschlossenen Raumformen . . . . .	379
<b>§ 43. Die offenen euklidischen Raumformen</b>	
Zerlegbare Raumgruppen . . . . .	382
Hilfssätze über unitäre Matrizen . . . . .	383
Der Zerlegbarkeitssatz . . . . .	385
Bestimmung der offenen Raumformen . . . . .	394
Die zweidimensionalen offenen Raumformen . . . . .	396
<b>§ 44. Die sphärischen Raumformen</b>	
Die kongruenten Abbildungen der Sphäre . . . . .	397
Sphärische Raumformen gerader Dimension . . . . .	398
Sphärische Raumformen ungerader Dimension . . . . .	399
Elliptische Raumformen. . . . .	402
<b>§ 45. Die hyperbolischen Raumformen</b>	
Allgemeine Bemerkungen . . . . .	403
Die zweidimensionalen geschlossenen Raumformen . . . . .	404
Die zweidimensionalen offenen Raumformen . . . . .	409

Neuntes Kapitel: **Räume der Krümmung  $\leq 0$** **§ 46. Geradenräume und Räume ohne konjugierte Punkte**

Konjugierte Punkte . . . . .	413
Geradenräume . . . . .	418
$G$ -Flächen . . . . .	421
Zweidimensionale Geradenräume . . . . .	426

**§ 47. Räume der Krümmung  $\leq 0$** 

Vorbemerkungen über Räume der Krümmung $\leq 0$ . . . . .	427
Eine Konvexitätseigenschaft der geodätischen Kurven . . . . .	427
Konvexität der sphärischen Umgebungen . . . . .	430
Minkowskische Trapezoide . . . . .	432
Räume der Krümmung $\leq 0$ und Geradenräume . . . . .	437

**§ 48. Räume beschränkter  $F$ -Krümmung**

Gebiete der $F$ -Krümmung $\leq K$ . . . . .	439
Winkel in Räumen beschränkter $F$ -Krümmung . . . . .	440
Die lokale Metrik . . . . .	443

**§ 49. Geodätische Kurven in Räumen negativer Krümmung**

Existenzsätze in Räumen ohne konjugierte Krümmung . . . . .	447
Axiale Isometrien . . . . .	447
Geschlossene geodätische Kurven und die Fundamentalgruppe . . . . .	449
Der Fall der Räume negativer Krümmung . . . . .	451
Der Fall der Abelschen Fundamentalgruppe . . . . .	452

**§ 50. Asymptoten und Parallelen**

Co-Strahlen . . . . .	455
Die Hilfsfunktion $\alpha(x, f)$ . . . . .	457
Grenzspähren . . . . .	458
Asymptoten in Geradenräumen . . . . .	460
Asymptoten in Geradenräumen der Krümmung $\leq 0$ . . . . .	461
Parallele in Geradenräumen . . . . .	463
Asymptoten bei isometrischen Abbildungen . . . . .	464

**§ 51. Verlauf von Geodätischen in Räumen der Krümmung  $\leq 0$** 

Die Hadamardsche Definition der Asymptote . . . . .	466
Die Distanzfunktion von Geodätischen . . . . .	468
Ein Satz über mehrfache Asymptoten . . . . .	469

**§ 52. Flächen negativer Krümmung**

Isometrien auf Geradenflächen . . . . .	471
Die Schiebungen . . . . .	471
Die Gleitspiegelungen . . . . .	474
Die Grendrehungen . . . . .	475
Die Zylinderflächen . . . . .	475
Die Ringflächen . . . . .	485
Flächen höheren Zusammenhanges . . . . .	486
Bemerkungen . . . . .	489

Zehntes Kapitel: **Sphäroide und Räume vom elliptischen Typ****§ 53. Räume mit Gegenpunkten**

Paare von Gegenpunkten . . . . .	490
Definition der Sphäroide und der Räume vom elliptischen Typ . . . . .	493
Die Sphäroide . . . . .	493
Räume vom elliptischen Typ . . . . .	495

**§ 54. Eindeutige Verbindbarkeit durch Geodätische**

Räume mit eindeutiger Verbindbarkeit durch Geodätische . . . . .	499
Räume, in denen jede Geodätische eine Gerade oder ein Kreis ist . . . . .	501
Der Hermitesche-elliptische Raum . . . . .	504
Geradenräume, Räume vom elliptischen Typ und die Grundlagen der Geometrie . . . . .	507
Literaturverzeichnis . . . . .	509
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .	515