

Inhaltsverzeichnis

Erstes Kapitel: **Metrische Geometrie und Topologie**

§ 1. Grundbegriffe der metrischen Geometrie

Begriff des metrischen Raumes	1
Teilräume	1
Isometrie	2
Der euklidische Raum	3
Der sphärische Raum	4
Der hyperbolische Raum	5
Lineare metrische Räume	8
Das metrische Produkt	9

§ 2. Die Topologie des metrischen Raumes

Umgebungen	11
Die topologische Struktur eines metrischen Raumes.	11
Topologisch äquivalente Metriken	12
Topologie in Teilräumen.	14
Das Innere und die Begrenzung	15
Der allgemeine Umgebungsbegriff	16

§ 3. Abgeschlossene Mengen

Die abgeschlossene Hülle	17
Abgeschlossene Mengen	18
Dichte Mengen	19
Die Abweichung zweier Mengen	19
Normalität	21

§ 4. Vollständige Räume

Konvergenz	22
Konvergenz in Produkträumen	23
Cauchysche Folgen	24
Vollständige Räume	25
Vervollständigung eines Raumes	27

§ 5. Kompakte und finit kompakte Räume

Häufungspunkte	30
Kompakte Mengen	31
Totalbeschränkte Mengen	33
Separable Räume	35
Überdeckungssätze	37
Finit kompakte Räume	39
Lokal kompakte Räume	41

§ 6. Zusammenhang

Zusammenhängende Mengen	43
Beispiele zusammenhängender Räume.	46

Komponentenzerlegung	47
Lokal zusammenhängende Räume	48

§ 7. Der abgeschlossene Limes

Unterer und oberer abgeschlossener Limes	50
Grundeigenschaften der abgeschlossenen Konvergenz	50
Die Busemannsche Metrik	53
Die Hausdorffsche Metrik	56

Zweites Kapitel: Stetige Abbildungen

§ 8. Grundeigenschaften der stetigen Abbildungen

Definition	58
Allgemeine Sätze über stetige Abbildungen	59
Stetige Abbildungen kompakter Räume	61
Stetige Abbildungen zusammenhängender Räume	63
Stetige Abbildungen von Produkträumen	63

§ 9. Stetige und gleichmäßige Konvergenz

Konvergenz von Abbildungsfolgen	63
Stetige Konvergenz	64
Gleichmäßige Konvergenz	65
Lokal gleichmäßige Konvergenz	68
Konvergenz der Graphen	69
Eine Ummetrisierung lokal kompakter Räume	74
Separabilitätsbedingungen	76

§ 10. Gleichgradig stetige Familien

Begriff der gleichgradigen Stetigkeit	78
Der Satz von Ascoli	79
Gleichmäßig beschränkte Familien	81
Dehnungsbeschränkte Abbildungen	82

§ 11. T - und F -Räume

Topologische Äquivalenz von Abbildungen	82
Die Frechetsche Äquivalenz	83
Metrisierung des Raumes der F -Räume	84
Mehrfache Punkte	87
Stetige Abbildungen von T - und F -Räumen	87

§ 12. Kurven

Die Kurventypen.	88
Die Endpunkte	88
Nichtausgeartete Parameterdarstellungen	89
Geschlossene Kurven	94
Orientierung	95
Zerlegungen und Zusammensetzungen von Kurven	98

Drittes Kapitel: Die innere Metrik

§ 13. Die Länge einer Kurve

Vorbereitende Betrachtungen	99
Die Kurvenlänge	100
Die Länge als Parameter	103

Differenzierbarkeitseigenschaften	106
Parameterfreie Kennzeichnung der Kurvenlänge	109
Die Länge geschlossener Kurven	111

§ 14. Der Raum der rektifizierbaren Kurven

Kompaktheitskriterien	112
Die Längenkonvergenz	114

§ 15. Die innere Metrik

Finis bogenverknüpfte Räume	116
Die innere Metrik	118
Räume mit innerer Metrik	121
Die innere Geometrie	122

§ 16. Finslersche Räume

Erzeugung von inneren Metriken	123
Topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeiten	127
Finslersche Mannigfaltigkeiten	129
Die Metrik in einem Finslerschen Raum	130

Viertes Kapitel: Theorie der Kürzesten

§ 17. Kürzeste

Definition und allgemeine Eigenschaften	140
Existenzsätze	141
Konvergenz von Kürzesten	142
Polygone	143
Anwendungen und Beispiele	145

§ 18. Konvexität

Die Zwischenbeziehung	146
Konvexitätsbegriffe	147
Konvexe Teilmengen	151
Einfach konvexe Räume	152
Fastkonvexe Räume	154
Sphärische Umgebungen in fastkonvexen Räumen	157

§ 19. Metrische Singularitäten

Durchgangs- und Fluchtpunkte	160
Verzweigungspunkte	162

§ 20. Geodätische

Geodätische Kurven	164
Geodätische Strahlen	165
Geodätische	167

§ 21. Absolute konjugierte Punkte

Geraden und Kreise	168
Existenz gerader Strahlen	169
Absolute konjugierte Punkte	172
Die Schale eines Punktes	173
Eindeutigkeit der Kürzesten im Kleinen	174

§ 22. Konvergenz von geodätischen Kurven und Strahlen

Konvergenz von geodätischen Kurven	178
Konvergenz von geodätischen Strahlen	179

§ 23. Lote und die Konvexität der Vollsphären

Fußpunkte und Lote	182
Konvexe Umgebungen	183

Fünftes Kapitel: Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume

§ 24. Deformationen

Homotopie	186
Zusammenziehbare Räume	188
Isotopie	189

§ 25. Die Fundamentalgruppe

Homotopie von Kurven	193
Die Fundamentalgruppe	194
Die freie Homotopie	196
Einfach zusammenhängende Räume	198

§ 26. Relative Kürzeste

Definition der relativen Kürzesten	201
Der Existenzsatz von J. HADAMARD	203

§ 27. Überlagerungsräume

Lokal isometrische Abbildungen	204
Metrische Eigenschaften der Überlagerungsräume	206
Überlagerungsräume und Fundamentalgruppe	210

§ 28. Der universelle Überlagerungsraum

Existenz von universellen Überlagerungsräumen	214
---------------------------------------------------------	-----

§ 29. Decktransformationen

Die Gruppe der Decktransformationen	220
Quotientenräume	223
Raumgruppen	224
Ein Existenzsatz für geschlossene geodätische Kurven	227
Fundamentaltbereiche	228
Normalbereiche	233

Sechstes Kapitel: Existenzsätze für geodätische Kurven

§ 30. Komplexe und Polyeder

Simplexe	236
Komplexe	238
Polyeder	238
Triangulierbare Mannigfaltigkeiten	239
Isomorphe Komplexe	242
Die baryzentrische Unterteilung	245
Die Zylinderkonstruktion	247

§ 31. Absolute Umgebungsretrakte

Retraktionseigenschaften der Polyeder	249
Retraktionseigenschaften des Raumes der stetigen Wege	253
Absolute Umgebungsretrakte und Zusammenziehbarkeit.	255
Der n -dimensionale Zusammenhang	258
Zusammenziehbarkeit und n -dimensionaler Zusammenhang	259

§ 32. Kategorie einer Menge

Grundeigenschaften der Kategorie	263
Existenz von nicht zusammenziehbaren Mengen in $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ und \mathfrak{C}_0	266

§ 33. Existenzsätze für geodätische Kurven

\mathfrak{Q} -Deformationen	268
\mathfrak{Q}' -Deformationen	271
Wesentliche Werte und Minimalmengen	272
Anwendung der Theorie der Kategorie	274
Abschluß des Existenzbeweises	277

§ 34. Anwendungen des Spernerschen Lemmas

Das Lemma von SPERNER.	280
Die Nichtzusammenziehbarkeit der n -Sphäre.	281
Die Invarianz der Dimension	283
Ein Satz von A. D. ALEXANDROW	286

Siebentes Kapitel: Theorie der Krümmung

§ 35. Der Winkelbegriff in metrischen Räumen

Richtungen und Winkel im euklidischen Raum	289
Dreieckswinkel in metrischen Räumen	290
Der obere Winkel	291
Der Raum der Richtungen	296
Der Winkel zwischen Kurven	296
Winkel in Minkowskischen Räumen.	298
Winkel in Finslerschen und Riemannschen Räumen.	302

§ 36. Räume beschränkter Krümmung

Vorbereitende Betrachtungen	308
Gebiete der Krümmung $\leq K$ bzw. $\geq K$	310
Grundeigenschaften der Räume beschränkter Krümmung	311
Beispiele	313

§ 37. Räume beschränkter Riemannscher Krümmung

Eine Monotonieeigenschaft des Dreieckswinkels	314
Räume beschränkter Riemannscher Krümmung	316
Der Fall der nach unten beschränkten Riemannschen Krümmung	317

§ 38. Winkelexistenz im starken Sinne

Existenz des Winkels im starken Sinne bei einer Krümmung $\leq K$	320
Der Satz vom Nebenwinkel im Falle der Krümmung $\leq K$	323
Existenz des Winkels im starken Sinne bei einer Krümmung $\geq K$	324
Lote und rechte Winkel	327

§ 39. Der Dreiecksexzeß

Definition der Exzesse	328
Der Fall der nach oben beschränkten Krümmung	329
Der Fall der nach unten beschränkten Krümmung	334
Eine Charakterisierung der Riemannschen Krümmung durch den absoluten Exzeß	337
Rechtfertigungssätze	342

§ 40. Der Richtungsraum in Räumen beschränkter Krümmung

Sätze über die Winkelkonvergenz.	344
Existenz der Winkel zwischen Kurven	346
Die Winkelmetrik im Richtungsraum	348
Schlußbemerkungen	353

Achtes Kapitel: Das Clifford-Kleinsche Raumformenproblem**§ 41. Räume konstanter Riemannscher Krümmung**

Definitionen und Grundeigenschaften	354
Eine Kennzeichnung der Mannigfaltigkeiten konstanter Riemannscher Krümmung	355
Das Clifford-Kleinsche Raumformenproblem	359
Die einfach zusammenhängenden Raumformen.	361
Das Lösungsverfahren	363

§ 42. Die geschlossenen euklidischen Raumformen

Allgemeine Eigenschaften der kongruenten Abbildungen	364
Die Translationsuntergruppen der Raumgruppen	367
Die rotativen Bestandteile der Raumgruppen	371
Raumgruppen, die zu geschlossenen Raumformen gehören	371
Die Berechnung der Raumgruppen	376
Die zweidimensionalen geschlossenen Raumformen	379

§ 43. Die offenen euklidischen Raumformen

Zerlegbare Raumgruppen	382
Hilfssätze über unitäre Matrizen	383
Der Zerlegbarkeitssatz	385
Bestimmung der offenen Raumformen	394
Die zweidimensionalen offenen Raumformen	396

§ 44. Die sphärischen Raumformen

Die kongruenten Abbildungen der Sphäre	397
Sphärische Raumformen gerader Dimension	398
Sphärische Raumformen ungerader Dimension	399
Elliptische Raumformen.	402

§ 45. Die hyperbolischen Raumformen

Allgemeine Bemerkungen	403
Die zweidimensionalen geschlossenen Raumformen	404
Die zweidimensionalen offenen Raumformen	409

Neuntes Kapitel: **Räume der Krümmung ≤ 0** **§ 46. Geradenräume und Räume ohne konjugierte Punkte**

Konjugierte Punkte	413
Geradenräume	418
G -Flächen	421
Zweidimensionale Geradenräume	426

§ 47. Räume der Krümmung ≤ 0

Vorbemerkungen über Räume der Krümmung ≤ 0	427
Eine Konvexitätseigenschaft der geodätischen Kurven	427
Konvexität der sphärischen Umgebungen	430
Minkowskische Trapezoide	432
Räume der Krümmung ≤ 0 und Geradenräume	437

§ 48. Räume beschränkter F -Krümmung

Gebiete der F -Krümmung $\leq K$	439
Winkel in Räumen beschränkter F -Krümmung	440
Die lokale Metrik	443

§ 49. Geodätische Kurven in Räumen negativer Krümmung

Existenzsätze in Räumen ohne konjugierte Krümmung	447
Axiale Isometrien	447
Geschlossene geodätische Kurven und die Fundamentalgruppe	449
Der Fall der Räume negativer Krümmung	451
Der Fall der Abelschen Fundamentalgruppe	452

§ 50. Asymptoten und Parallelen

Co-Strahlen	455
Die Hilfsfunktion $\alpha(x, f)$	457
Grenzspähren	458
Asymptoten in Geradenräumen	460
Asymptoten in Geradenräumen der Krümmung ≤ 0	461
Parallele in Geradenräumen	463
Asymptoten bei isometrischen Abbildungen	464

§ 51. Verlauf von Geodätischen in Räumen der Krümmung ≤ 0

Die Hadamardsche Definition der Asymptote	466
Die Distanzfunktion von Geodätischen	468
Ein Satz über mehrfache Asymptoten	469

§ 52. Flächen negativer Krümmung

Isometrien auf Geradenflächen	471
Die Schiebungen	471
Die Gleitspiegelungen	474
Die Grendrehungen	475
Die Zylinderflächen	475
Die Ringflächen	485
Flächen höheren Zusammenhanges	486
Bemerkungen	489

Zehntes Kapitel: **Sphäroide und Räume vom elliptischen Typ****§ 53. Räume mit Gegenpunkten**

Paare von Gegenpunkten	490
Definition der Sphäroide und der Räume vom elliptischen Typ	493
Die Sphäroide	493
Räume vom elliptischen Typ	495

§ 54. Eindeutige Verbindbarkeit durch Geodätische

Räume mit eindeutiger Verbindbarkeit durch Geodätische	499
Räume, in denen jede Geodätische eine Gerade oder ein Kreis ist	501
Der Hermitesch-elliptische Raum	504
Geradenräume, Räume vom elliptischen Typ und die Grundlagen der Geometrie	507
Literaturverzeichnis	509
Namen- und Sachverzeichnis	515