

Erster Teil. Zur Methodik

I. Der Deus ex machina im Transzendenzbeweis.

1. Der Lindemannsche Satz.	1
2. Die Transzendenz von π	2
3. Die Transzendenz von e	2
4. Das Hermitesche Integral als „deus ex machina“	3
5. Die Mathematik beweist einen Mangel unseres Verstandes.	8
6. Die Berechtigung heuristischer Darstellungsweise	4
7. Das Hermitesche Integral als Schlüssel zum Transzendenzbe- weise	4
8. Der Transzendenzbeweis als Kunstschloß	5
9. Die Rohform des Schlüssels und ihre Ausarbeitung.	5

II. Die fortschreitende Spezial- sierung.

10. Inhalt und Umfang von Begriffen	6
11. Natürliche Gliederung des Ge- dankenganges.	6
12. Problematische Annahmen	6
13. Tragweite der einzelnen Annah- men	7
14. Praktische Maximen der Darstel- lung	7

Zweiter Teil. Allgem

IV. Ganze Funktionen.

A. Wertgleichheit und formale Gleichheit.

32. Ziel der nächsten Untersuchungen	19
33. Der formale und der abstrakte Funktionsbegriff	19

Inhalt	IV
------------------	----

k der Beweisanordnung.

15. Der elementare Standpunkt	7
16. Die Kürze des Ausdrucks	8
17. Gefahren des eleganten Ansatzes	8
18. Unzweckmäßige Spezialisierung der Fehlerschätzung im Tran- szendenzbeweis	9
19. Die Fehlerschätzung soll rein analytisch erfolgen	9
20. Die Nachteile numerischer Spe- zialisierungen	10

III. Der indirekte Beweis.

21. Die indirekte Fassung des Tran- szendenzbeweises	11
22. Ihre Nachteile und ihre Nicht- berechtigung	11
23. Beweis des pythagoreischen Sat- zes nach indirekter Manier	12
24. Die logische Umkehrung	12
25. Der vierte Kongruenzsatz	13
26. Die vollständige Umkehrung	14
27. Der „Horror vacui“	15
28. Der klassische Formalismus der Darstellung	16
29. Das indirekte Verfahren als Ana- lysis des Beweises	17
30. Beispiele	17
31. Die indirekte Fassung des Tran- szendenzbeweises als Rudiment	18

eine Vorbereitungen.

34. Wertgleichheit	20
35. Die formalen Rechengesetze	20
36. Potenzen und Potenzreihen	20
37. Koeffizientengleichheit. Reduk- tion. Grad und höchstes Glied	21
38. Ganze Rechenausdrücke	21

	Seite
39. Umformungsgleichheit	21
40. Abstrakte Definition der ganzen Funktion	21
41. Formale Definitionen der ganzen Funktion	21
42. Formale Addition und Multipli- kation	22
43. Übereinstimmung von Koeffizien- tengleichheit und Umformungs- gleichheit	22

B. Formale Darstellung und Werteverlauf.

44. Formulierung der Übereinstim- mung formaler Gleichheit und Wertegleichheit	23
45. Bestimmung der Potenzreihe aus vorgeschriebenen Funktionswer- ten durch lineare Gleichungen .	23
46. Potenzentwicklung an einer Stelle. Erster und letzter Koeffizient. .	23
47. Die Zahl der Nullstellen ist nicht höher als der Grad	24
48. Wertegleichheit an n Stellen. .	24
49. Lagrange'sche Darstellung einer Funktion durch n vorgeschriebene Werte	24
50. Ganze Funktionen von k Argu- menten	25
51. Bezeichnungsweise. Potenzen von k Argumenten.	25
52. Potenzreihen von k Argumenten	26
53. Koeffizienten- und Wertegleich- heit	26

C. Der Ableitungskalkul.

54. Formale Definition der abgelei- teten Funktion	26
55. Sukzessive Ableitung nach zwei Argumenten	27
56. Formel der partiellen Differen- tiation	27
57. Abgeleitete von Summe, Produkt, Potenz	28
58. Höhere Abgeleiteten. Bezeich- nung.	28
59. Höhere Abgeleiteten der Potenz eines einfachen Arguments. . .	28
60. Dasselbe für mehrere Argumente	29
61. Die Taylorsche Reihe	29
62. Die Definition der Abgeleiteten in der höheren Analysis	30

D. Ganzzahlige Funktionen.

63. Definition und erste Folgerungen	30
64. Funktionen von Funktionen. Die abgeleiteten Funktionen	30
65. Die allgemeine ganze Funktion als ganzzahlige Funktion . . .	30
66. Der polynomische Satz	31
67. Derselbe für Primzahlexponenten	31
68. Ein Satz von Fermat.	32

V. Absolutbeträge und Mittelwertsätze.**A. Absolutbeträge.**

69. Absolutbetrag von Produkt und Quotient	32
70. Summe und Integral	32
71. Differenz und Abgeleitete . . .	33

B. Die Mittelwertsätze.

72. Gerade Bahn von a nach b in der Zahlenebene	33
73. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung	33
74. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	33
75. Beweis des letzteren ohne Integralbegriff	34

VI. Die Exponentialfunktion.**A. Konvergenz der Exponentialreihe.**

76. Definition der konvergenten Reihe	34
77. Reihen mit nichtnegativen Gliedern	34
78. Absolute Konvergenz	34
79. Die Exponentialreihe für positives Argument	35
80. Dieselbe für komplexes Argument. Restschätzungen.	35

B. Additionstheorem und Abgeleitete.

81. Das Additionstheorem	36
82. Die abgeleitete Funktion . . .	37

C. Werteverlauf und Periodizität.

83. Werteverlauf für reelles Argument. Endverlauf	37
84. Absolutbetrag und Endverlauf für komplexes Argument	37
85. Reinimaginäres Argument. Eulersche Formel	37
86. Die Abgeleiteten des reellen und imaginären Teils	38

87. Die kleinste positive Nullstelle des reellen Teils	38
88. Symmetrie und Periodizität des Werteverlaufs	38
89. Elementare Bestimmung der Periode	39
90. Dieselbe mit Benutzung der Differentialrechnung.	39

D. Allgemeine Exponentialfunktion und Logarithmus.

91. Natürlicher Logarithmus. Hauptlogarithmus zu positivem Numerus	40
92. Allgemeine Exponentialfunktion. Charakteristik, Modul, Basis	40
93. Reelle Charakteristik, positive Basis, Logarithmen dazu	40
94. Komplexe Charakteristik. Gefahren der üblichen Bezeichnungsweise	41

Dritter Teil. Die T

VIII. Verallgemeinerung der Exponentialreihe.

A. Aufstellung des Näherungswertes.

104. Empirische Mittelwertbildung	46
105. Bildung eines Mittelwertes $F(c) : F(0)$ aus den Näherungswerten $E_r(c)$ für e^c	46
106. Darstellung von $F(c)$ als $f(c) + f'(c) + f''(c) + \dots$	46
107. Darstellung von $F(c)$ durch Fakultäten.	47

B. Abschätzung und Beeinflussung des Fehlers.

108. Fehlerschätzung nach Hurwitz	47
109. Einfluß des Verschwindens von $f(x)$ für $x = 0$	47
110. Einfluß des Verschwindens von $f(x)$ für $x = c$	48

C. Anhang. Vergleichende Übersicht anderer Anordnungen.

111. Die beiden Anschlüsse an den Transzendenzbeweis	48
112. Fehlerschätzung nach Gordan und Weber	49

VII. Exponentialformen.

A. Funktionalformen. Echtheit.

95. Reduktion und Echtheit 41
 96. Echte Funktionalformen sind nicht identisch null 42
 97. Die Formen K und K^* 42
 98. Zwei weitere Beweise zu § 96. 42

B. Exponentialformen.

99. Abschätzung durch die Exponentialreihe 43
 100. Entwicklung nach Potenzen der Charakteristik 43

C. Ein Satz von Liouville.

101. Die Zahl e ist weder rational noch quadratisch irrational. Analytischer Teil des Beweises . . 44
 102. Zahlentheoretischer Teil des Beweises 44
 103. Methodische Bemerkungen und Ausblick auf den Transzendenzbeweis 45

Transzendenz von e .

113. Der Beweis von Weber. Reinformale Verwendung der Abgeleiteten 49
 114. Umgehung der formalen Abgeleiteten durch explizite Rechnung 49
 115. Gordans Symbolik zur Abkürzung dieser Rechnung 50
 116. Die symbolisch abgekürzte Rechnung 50
 117. Der Beweis von Hurwitz 51
 118. Fehlerschätzung durch ein Integral nach Hilbert. 51
 119. Darstellung von $F'(c)$ durch das Hermitesche Integral 52
 120. Rückweg vom Hermiteschen Integral zu § 106 durch Ableitung 52
 121. Dasselbe durch partielle Integration. Die Gammafunktion . 52
 122. Direkter Weg des Hilbertschen Beweises vom Hermiteschen Integral zu § 107. 52
 123. Schematische Darstellung der Zusammenhänge 53
 124. Historisches zu den Beweisen von Hilbert, Hurwitz, Gordan, Weber, Vahlen. 54
 125. Der Beweis von Mertens. 54

IX. Analytischer Teil des Transzendenzbeweises.

126.	Die Nullstellen der Abschätzungs- funktion	54
127.	Der Fehler der Abschätzung .	55
128.	Allgemeinerer Ansatz der Ab- schätzungsfunktion	55
129.	Die Schätzung des Fehlers nach Gordan	55
130.	Die Größenordnung des Fehlers	55

X. Zahlentheoretischer Teil des Transzendenzbeweises.

A. Ganzzahligkeit.

131.	Ganzzahligkeit der Abschätz- ungsfunktion	56
132.	Teilbarkeit des Näherungsglie- des durch $m!$	56
133.	Ausblick. Bestimmung eines ge- eigneten Moduls	56

B. Die erste Variante des Beweises.

134.	Entwicklung der Abschätzungs- funktion nach dem polynomi- schen Lehrsatz.	57
135.	Die fundamentale Kongruenz für das Näherungsglied.	57

Vierter Teil. Algebra

XI. Mengen und Folgen.

A. Formale und numerische Verschiedenheit.

149.	Endliche Mengen.	63
150.	Identisch und different. Gleich und verschieden	63

B. Allgemeine Mengen.

151.	Identische und differente Mengen	64
152.	Zerlegung einer Menge	64
153.	Komplementäre Mengen. Leere Menge, unechte Zerlegung . . .	64
154.	Teile, Kombinationen	64
155.	Eineindeutige Abbildung	64
156.	Permutation	64

C. Numerische Mengen.

157.	Vielfachheit der Elemente. Wertevorrat	65
------	---	----

136. Die Annahme $E = 0$ führt auf den Fall einer unechten Form. 58

C. Die zweite Variante des Beweises.

137. Kongruenz des Näherungsausdrucks mit seinem niedersten Glied 58
138. Vereinfachung durch einen Primzahlmodul. Erste Methode . . 58
139. Zweite Methode 59
140. Zusammenhang der ersten Methode mit der ersten Variante 59
141. Zusammenhang der ersten und zweiten Methode 59

D. Übersicht der Ergebnisse.

142. Die Zusatzfunktionen und die Zahl B , Beispiele 60
143. Die Funktion $\varphi(x)$ 60
144. Der Exponent p 60
145. Verlauf des Beweises in beiden Varianten. Gegenüberstellung . 60
146. Vergleich beider Varianten hinsichtlich der zahlentheoretischen Hilfsmittel. 61
147. Umgebung des Fermatschen Satzes. 61
148. Die übliche Spezialisierung der zweiten Variante in den bekannten Beweisen 62

sche Vorbereitungen.

158. Untermengen. Gleiche und verschiedene Mengen 65
159. Bestimmtheit 65
160. Durchschnitt. 65

D. Allgemeine Folgen.

161. Identische und differente Folgen 66
162. Variationen 66

E. Zahlfolgen.

163. Gleiche und verschiedene Folgen 66
164. Verwandte Folgen. Familien . 66
165. Anwendungen 66

XII. Die Verknüpfungssätze.

A. Subtraktion und Division.

166. Subtraktion, Null und entgegengesetzte Größen 67

167. Die Null als Ausnahmedivisor. Eindeutigkeitssatz der Division	67
168. Nullteiler	68
169. Einheit. Reziproke	68

B. Teilbarkeit.

170. Teilbarkeitsbereiche	68
171. Teilbarkeit. Einheitsteiler. . .	68
172. Äquivalenz von Größen und Zerlegungen	69
173. Zerlegbare, einfache und Primgrößen	69
174. Beispiele von einfachen Teilbarkeitsbereichen.	69
175. Integritäts- und Rationalitätsbereiche.	70

C. Das Rechnen nach einem Modul.

176. Elementare Kongruenzen . . .	70
177. Allgemeiner Kongruenzbegriff. Null und Nullteiler nach einem Modul.	70
178. Nullteiler erster Art	71
179. Nullteiler zweiter Art	71
180. Größter gemeinsamer Teiler. .	71
181. Beispiele	71

D. Verknüpfung von Zahlfolgen.

182. Addition, Subtraktion, Null . .	72
183. Gliedweises Produkt zweier Zahlfolgen. Eins, Reziproke und Nullteiler	72
184. Produkt einer Folge und einer Zahl	72
185. Darstellung durch linear unabhängige Folgen	72
186. Die Grundeinheiten.	73
187. Spur und Norm	73
188. Inneres Produkt	73
189. Exponentialfunktion	73
190. Allgemeiner Produktbegriff . .	74
191. Galoissche Felder, komplexe Zahlen, Quaternionen.	74
192. Äußeres Produkt.	74

XIII. Die Anordnungssätze.

A. Transitive und additive Eigenschaft.

193. Die vier Anordnungssätze . . .	74
194. Zusammenfassung des transitiven und additiven Gesetzes .	75
195. Zusätze und Anwendungen . .	75

B. Die Anordnung von Zahlfolgen.

196. Der Disjunktionssatz	75
197. Das transitive Gesetz	75
198. Das additive Gesetz	76
199. Zusätze und Anwendungen	76

C. Grundfolgen und Familien.

200. Grundglied einer Familie	76
201. Grundfolgen	76
202. Eine Grundfolge muß Grundglied ihrer Familie sein	77
203. Das Grundglied einer Familie muß eine Grundfolge sein	77
204. Darstellung von Grundfolgen durch Grundeinheiten	77
205. Grundfolgen aus natürlichen Zahlen	77
206. Zerlegbarkeit und Zerlegungssatz	78

XIV. Allgemeine Exponentialformen.**A. Das formale Rechnen mit Exponentialformen.**

207. Reduziertheit, Gliederzahl, Echtheit	78
208. Gleichheit, Summe, Differenz, Produkt, Null, Eins	78
209. Eindeutigkeitssatz und Eingliedrigkeitssatz	79
210. Höchste und niederste Glieder	79
211. Anordnung der Basis :	79
212. Produkt der höchsten Glieder	80
213. Beweise zu § 209	80
214. Bedeutung der Voraussetzungen in § 209	80

B. Teilbarkeitsfragen.

215. Einheitsteiler und äquivalente Formen	80
216. Der Rationalitätssatz	81
217. Rationalzahlige, ganzzahlige primitive und Hauptformen	81
218. Äquivalente Bereiche	81
219. Korrespondierende Bereiche	81
220. Isomorphismus. Zerlegbare primitive Formen	82
221. Primitive Hauptformen	82
222. Ganzzahlige Formen nach einem Primzahlmodul	82

XV. Algebraische Zahlen.**A. Symmetrische Funktionen.**

223.	Ganze Funktionen	82
224.	Verwandte Funktionen	83
225.	Symmetrische Funktionen. Ihre Ordnung	83
226.	Eintypige Funktionen	83
227.	Produkt eintypiger Funktionen	84
228.	Elementarsymmetrische Funk- tionen	84
229.	Der Fundamentalsatz der sym- metrischen Funktionen	84
230.	Mehrfach symmetrische Funk- tionen	85
231.	Folgen zweiter Stufe	85
232.	Symmetrische Funktionen zwei- ter Stufe	85

B. Reduzibilität und Irreduzibilität.

233.	Fundamentalsatz der Algebra .	86
234.	Hauptfunktion, Wurzeln . . .	86
235.	Teilbarkeitsfragen und Wurzeln	86
236.	Funktionen mit Koeffizienten eines bestimmten Rationalitäts- bereiches	86
237.	Rationale Koeffizienten. Bündel	87
238.	Vereinigungen, Komplemente, Durchschnitte und Wertevorräte von Bündeln. Reduzible und ir- reduzible Bündel	87
239.	Primgrößencharakter irreduzi- bler Funktionen	87

C. Algebraisch-ganze Zahlen.

240.	Ganzzahlige Bündel	87
241.	Algebraisch-ganze Zahlen . . .	87
242.	Algebraisch-gebrochene Zahlen. Nenner	88

D. Symmetrische Funktionen eines Bündels.

243.	Der allgemeine Satz über die rationale Darstellbarkeit . . .	88
------	---	----

Fünfter Teil. Der Lindemannsche**XVII. Die Spezialisierung der Pro-
blemstellung.****A. Spezialisierung auf algebraisch-ganze
Zahlen.**

262.	Spezialisierung auf algebraisch- ganze Koeffizienten	94
263.	Spezialisierung auf algebraisch- ganze Exponenten	94

244. Der Fermatsche Satz für algebraisch-ganze Zahlen 88

E. Symmetrische Funktionen und Bündel zweiter Stufe.

245. Bündel zweiter Stufe 88
 246. Erste Konstruktion eines Bündels zweiter Stufe, das eine gegebene Folge algebraischer Zahlen als Element enthält . . . 89
 247. Zweite Konstruktion 89
 248. Zusätze 89
 249. Werte einer ganzzahligen Funktion für algebraische Argumente 90
 250. Dasselbe im Falle einer symmetrischen Funktion 90

F. Lineare Funktionen.

251. Norm einer linearen Form mit algebraischen Koeffizienten . . 90
 252. Symmetrie in einzelnen Argumenten 91
 253. Einheitswurzeln 91
 254. Norm einer Form mit Einheitswurzeln 91
 255. Symmetrie. 91

XVI. Exponentialformen mit algebraischen Bestimmungsstücken.

256. Integritätsbereiche mit algebraischen Koeffizienten oder Exponenten 91
 257. Exponentiale Bilder. Terminologisches 92
 258. Reduktion von Spuren 92
 259. Spurenformen. Reduziertheit und Echtheit 92
 260. Spurenformen und Exponentialformen 93
 261. Integritätsbereiche aus Spurenformen 93

Satz und die Transzendenz von π .

264. Erhaltung der gespurten Bauart hierbei 94

B. Spezialisierung auf symmetrischen Bau.

265. Spezialisierung auf rationale Koeffizienten 95
 266. Erhaltung der gespurten Bauart hierbei 95

	Seite
267. Spezialisierung auf gespürte Bauart	95

C. Zusammenfassung und Zusätze.

268. Kombination der vier Spezialisierungen	96
269. Spezialisierung des Lindemannschen Problems	96
270. Die prinzipiell möglichen Abkürzungen der Spezialisierungen	96
271. Mögliche Abkürzung in § 263	96
272. Naheliegende Abkürzung in § 265	97
273. Entbehrlichkeit der Spezialisierung auf ganzzahlige Exponenten	97

XVIII. Der Beweis des Lindemannschen Satzes.

274. Ansatz	97
275. Fehlerschätzung	98
276. Die Entwicklung des § 134 in der abgeänderten Bezeichnung	98

Alphabetisches Verzeichnis.

277. Die fundamentale Kongruenz und der Abschluß des Beweises	98
--	----

XIX. Varianten des Beweises.

A. Varianten des allgemeinen Beweises.

278. Die Analogie zu § 137.	99
279. Elementare Variante, falls ein Exponent rational ist	99
280. Zurückführung des allgemeinen Falles auf den eines rationalen Exponenten.	100

B. Die Transzendenz von π .

281. Das Verfahren mit algebraisch- ganzen Exponenten	100
282. Die Spurenform mit algebraisch- gebrochenen Exponenten.	101
283. Ansatz der Abschätzung mit einem Nenner für gebrochene Exponenten.	101
284. Entwicklung an den nicht- bevorzugten Stellen	102
285. Entwicklung an der Stelle Null	102
286. Abschluß des Beweises	102
.	108