

# Table

AVANT-PROPOS .....	15
I. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES	
1. <i>Variétés topologiques</i> .....	17
1.1 Atlas sur un ensemble abstrait .....	17
1.2 Topologie associée à un atlas $C^0$ .....	18
1.3 Équivalence des topologies. Dimension .....	19
1.4 Les variétés topologiques du point de vue de la topologie générale ..	20
1.5 Les variétés topologiques du point de vue des atlas .....	22
2. <i>Rappels de résultats de calcul différentiel</i> .....	26
2.1 Application dérivée .....	26
2.2 Les classes $C^k$ .....	27
2.3 Difféomorphismes .....	28
3. <i>Variétés différentiables</i> .....	29
3.1 Atlas $C^k$ -équivalents .....	29
3.2 Définition d'une structure de variété de classe $C^k$ . Exemples .....	30
3.3 Applications de classe $C^k$ . Exemples .....	32
3.4 L'anneau des fonctions de classe $C^k$ .....	34
3.5 Image directe. Image réciproque .....	36
4. <i>Espace tangent</i> .....	37
4.1 Construction de l'espace tangent. Conséquences .....	37
4.2 Application dérivée .....	39
4.3 Principe de localisation .....	41
4.4 Notations et calculs pratiques .....	43
5. <i>Équivalence locale d'applications. Théorème du rang constant</i> .....	46
5.1 Problème de l'équivalence .....	46
5.2 Rang d'une application .....	47

5.3 Applications localement équivalentes à une application linéaire ...	49
5.4 Immersions, plongements .....	52
6. <i>Sous-variétés</i> .....	53
6.1 Définition .....	53
6.2 Sous-variétés et plongements .....	55
6.3 Théorème du rang constant et sous-variétés .....	58
6.4 Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$ .....	60
6.5 Application. Théorie des fonctions indépendantes .....	62
7. <i>Fibré tangent</i> .....	63
7.1 Le fibré tangent du point de vue algébrique .....	63
7.2 Structure de variété sur le fibré tangent .....	66
7.3 Dérivées d'ordre supérieur .....	68
7.4 Champs de vecteurs de classe $C^k$ .....	69
7.5 Champs de tenseurs covariants. Formes différentielles .....	71
7.6 Image réciproque d'un champ covariant .....	73
II. CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR LES VARIÉTÉS	
1. <i>Différentielles</i> .....	89
1.1 Variété parallélisée .....	89
1.2 Différentielle d'une application; Image réciproque .....	90
1.3 Différentielle d'une fonction à valeurs vectorielles .....	91
1.4 Calculs pratiques sur les formes différentielles .....	92
2. <i>Champs de vecteurs et groupes à un paramètre</i> .....	95
2.1 Problème de l'équivalence pour les champs de vecteurs .....	95
2.2 Lignes de courant d'un champ de vecteurs .....	96
2.3 Ligne de courant maximale .....	97
2.4 Pseudo-groupe de transformation associé à un champ de vecteurs ..	99
3. <i>Dérivées de Lie</i> .....	102
3.1 Définition et existence .....	102
3.2 Propriétés de la dérivée de Lie .....	104
3.3 Crochet de dérivations et crochets de champs de vecteurs .....	106
3.4 Calculs pratiques dans une carte numérique .....	110
3.5 Invariance par un groupe à un paramètre .....	111
4. <i>Cobord des formes différentielles</i> .....	112
4.1 Position du problème .....	112
4.2 Le critère d' $\mathcal{A}$ ( $V$ )-linéarité .....	113

4.3	Cobord de formes différentielles de degré I .....	115
4.4	Définition générale du cobord .....	117
4.5	Expression du cobord dans une carte numérique .....	118
4.6	Propriétés du cobord .....	119
5.	<i>Le théorème de Frobenius</i> .....	122
5.1	Notion de $p$ -champ .....	122
5.2	$p$ -Champ complément intégral. Le théorème de réduction .....	124
5.3	Variété intégrale .....	129
5.4	Quelques énoncés équivalents de la condition de Frobenius .....	130
5.5	Détermination pratique des variétés intégrales d'un $p$ -champ .....	134
 III. THÉORIE LOCALE DES GROUPES DE LIE. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES 		
1.	<i>Parallélisme canonique sur un groupe de Lie</i> .....	156
1.1	Notion de groupe de Lie .....	156
1.2	Translation à gauche .....	156
1.3	Parallélisme canonique sur un groupe de Lie .....	157
1.4	Formes invariantes à gauche .....	157
1.5	Champ de vecteurs invariants à gauche .....	159
2.	<i>Algèbre de Lie et équation de structure de Maurer-Cartan</i> .....	161
2.1	Algèbre de Lie abstraite .....	161
2.2	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie .....	162
2.3	Forme canonique à valeurs dans l'algèbre de Lie .....	163
2.4	Équation de structure de Maurer-Cartan .....	164
2.5	Expression dans une base des équations de structure .....	165
3.	<i>Théorie de l'équivalence de Darboux</i> .....	165
3.1	Définition de l'équivalence .....	165
3.2	Différentielle de Darboux .....	166
3.3	Équation de structure des différentielles de Darboux .....	166
3.4	Théorème d'existence fondamental. Construction d'une application ayant une différentielle de Darboux donnée .....	167
3.5	Détermination d'une application par son graphe .....	168
3.6	Traduction géométrique et démonstration du théorème fon- damental .....	169
3.7	Résolution du problème de l'équivalence .....	171
4.	<i>Homomorphisme de groupes de Lie</i> .....	172
4.1	Définition .....	172
4.2	Différentielle de Darboux d'un homomorphisme .....	173

4.3 Homomorphismes d'algèbres de Lie et différentielles de Darboux . . .	174
4.4 Homomorphisme de groupes et homomorphismes d'algèbres . . . . .	176
5. <i>Sous-groupes et sous-algèbres</i> . . . . .	177
5.1 Définition . . . . .	177
5.2 Sous-algèbre de Lie associée à un sous-groupe de Lie . . . . .	178
5.3 Problème de Frobenius attaché à une sous-algèbre de Lie . . . . .	178
5.4 Correspondance entre sous-groupes et sous-algèbres . . . . .	179
6. <i>Application exponentielle</i> . . . . .	181
6.1 Groupe de transformations attaché à un champ invariant à gauche .	181
6.2 Application exponentielle . . . . .	182
6.3 Homomorphisme de $\mathbf{R}$ dans un groupe de Lie $G$ . . . . .	183
7. <i>Groupes de transformation de la géométrie élémentaire</i> . . . . .	184
7.1 Rappel des définitions élémentaires des groupes classiques . . . . .	184
7.2 Groupe de Lie et groupes classiques . . . . .	185
7.3 Algèbre de Lie du groupe linéaire . . . . .	188
7.4 Produits semi-directs. Algèbre de Lie du groupe des déplacements .	191
7.5 La méthode du repère mobile en géométrie euclidienne . . . . .	194
8. <i>Géométrie riemannienne. Dérivation covariante. Plongements euclidiens</i> . . . . .	201
8.1 Variété riemannienne . . . . .	202
8.2 Champs de repères . . . . .	204
8.3 Fondement intrinsèque de la géométrie euclidienne par sa structure riemannienne . . . . .	208
8.4 Dérivation covariante . . . . .	211
8.5 Courbure d'une variété riemannienne . . . . .	215
8.6 Plongements riemanniens . . . . .	218
8.7 Théorie des hypersurfaces . . . . .	221

## IV. CALCUL DES VARIATIONS

1. <i>Formulation du problème</i> . . . . .	255
1.1 Métrique sur une variété différentiable . . . . .	255
1.2 Relèvement sur le fibré tangent . . . . .	257
1.3 Forme différentielle de Hilbert . . . . .	258
1.4 Covecteurs basiques sur $T(V)$ . . . . .	259
1.5 Lemme fondamental . . . . .	260

2. <i>Une condition nécessaire d'extrémum régulier : l'équation d'Euler-Cartan</i> . . . . .	262
2.1 Courbes extrémales régulières . . . . .	262
2.2 Théorème fondamental (Euler-Cartan) . . . . .	262
2.3 Calcul de la variation de la longueur d'une courbe . . . . .	263
2.4 Démonstration du théorème d'Euler-Cartan . . . . .	264
2.5 Exemple : géodésiques d'une variété riemannienne . . . . .	265
2.6 Exemple : les équations d'Euler-Lagrange . . . . .	267
3. <i>Champs géodésiques. Invariants intégraux</i> . . . . .	271
3.1 Descente de la forme de Hilbert . . . . .	272
3.2 Champ géodésique . . . . .	272
3.3 Invariants intégraux . . . . .	273
4. <i>Condition suffisante d'extrémum : méthode de Hilbert</i> . . . . .	274
4.1 Transversalité . . . . .	275
4.2 Champs de normales . . . . .	277
4.3 Condition suffisante de minimum de Hilbert . . . . .	278
5. <i>Théorie d'Hamilton-Jacobi</i> . . . . .	280
5.1 Application d'Hamilton . . . . .	280
5.2 Théorème (Équation d'Hamilton-Jacobi) . . . . .	281
5.3 Forme canonique sur $T(V^*)$ . . . . .	282
5.4 Forme canonique des équations d'Euler : Équations d'Hamilton . . .	283

## APPENDICE

Démonstration du théorème de réduction locale d'un champ de vecteurs .	293
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	303
INDEX . . . . .	305