

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Der rationale Zahlenkörper.

I. Kapitel: Von der Teilbarkeit der ganzen Zahlen.

Nr.		Seite
1.	Begriff des Zahlenkörpers und -Moduls. Der rationale Körper \mathfrak{R} . . .	1—2
2.	Beispiel eines Zahlenmoduls: Der Modul $[a, b, c, \dots]$	2—3
3.	Teiler einer Zahl. Zerlegbare und unzerlegbare Zahlen; jene sind als Produkte aus einer endlichen Anzahl unzerlegbarer Zahlen darstellbar	3—4
4.	Gemeinsamer Teiler zweier Zahlen. Grundtatsache der Zahlentheorie. <i>Euklidischer</i> Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers	5—8
5.	Teilerfremde oder relativ prime Zahlen <i>Euklidischer</i> Fundamentalsatz von solchen Zahlen. Primzahlen. Eindeutige Zerlegbarkeit der Zahlen in Primfaktoren	8—10
6.	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches mehrerer Zahlen	10—13

II. Kapitel: Von der Kongruenz der Zahlen.

1.	Definition der Kongruenz, Kongruenzmodul, einfachste Kongruenzregeln	13—15
2.	Die Wurzeln einer Kongruenz; Satz über ihre Anzahl im Falle eines Primzahlmoduls	15—18
3.	Restklassen; vollständiges und reduziertes Restsystem; die Funktion $\varphi(m)$	18—20
4.	Über Zahlen, welche nach mehreren gegebenen Moduln gegebene Reste lassen. Ein Satz von der Funktion $\varphi(m)$	20—22
5.	Ein zweiter Satz von der Funktion $\varphi(m)$	22—23
6.	Zusammenhang beider Sätze; die Funktion $\mu(m)$	23—26
7.	Die Kongruenz ersten Grades (mod. m), Anzahl der Wurzeln	26—28
8.	Der <i>Fermatsche</i> Satz	28—30
9 u. 10.	Der Exponent, zu welchem eine Zahl a (mod. p) gehört. Primitive Wurzeln (mod. p), zwei Beweise ihres Vorhandenseins	30—33
11.	Der auf eine primitive Wurzel g (mod. p) bezügliche Index $\text{ind}_g r$ einer Zahl r ; Satz über den Index eines Produktes; Übergang von einer primitiven Wurzel zu einer anderen; Analogie der Indizes mit den Logarithmen	33—35

III. Kapitel: Von den quadratischen Resten.

Nr.	Seite
1. Quadratische Reste und Nichtreste (mod. p). <i>Eulersches Kriterium. Fermatscher und Wilsonscher Satz</i>	36—38
Das <i>Legendresche</i> Symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ und seine fundamentalen Eigenschaften	
Der Rest des Produktes $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{p-1}{2}$ (mod. p) für den Fall $p = 4k - 1$	38—41
3. Das <i>Gaußsche</i> Lemma	41—43
4. Die sogenannten <i>Ergänzungssätze</i> , d. i. die Werte der Symbole $\left(\frac{-1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right)$	43—46
5—7. Das <i>Reziprozitätsgesetz</i> $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$; Tabelle der verschiedenen Beweise des Gesetzes; andere Bedeutung des <i>Gaußschen</i> Lemma; der (dritte) Beweis von <i>Lange</i> ; Beweis von <i>Zeller</i>	46—56
8. Das <i>Jacobische</i> Symbol und seine Eigenschaften; Verallgemeinerung des <i>Reziprozitätsgesetzes</i> und seiner <i>Ergänzungssätze</i>	56—60
9. <i>Eisensteins</i> Regel zur Bestimmung von $\left(\frac{P}{Q}\right)$	60—65

IV. Kapitel: Die Linearform $f = ax + by$.

1. Lineare Transformation. Äquivalente Linearformen	65—67
2. Geometrische Deutung der Transformation	67—70
3. Gauzzahlige Auflösung der Gleichung $ax + by = m$; Zurückführung auf die Gleichung $ax + by \equiv 1$ bei teilerfremden a, b	70—72
4—6. Die <i>Gaußschen</i> Klammern und ihre Eigenschaften	72—78
7. Ihr Zusammenhang mit dem Kettenbruch für $\frac{a}{b}$	78—80
8. Die Näherungsbrüche des Kettenbruchs	80—81
9. Unendliche Kettenbrüche und ihr Zahlenwert	81—83
10. Auflösung der Gleichung $ax - by = 1$ mittels des Kettenbruchs für $\frac{a}{b}$	83—85
11. Lineare Substitutionen; sie bilden eine Gruppe	85—86
12. Zusammensetzung der linearen Substitutionen aus zwei fundamentalen	86—89
13. Äquivalente Zahlen	89—91
14. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz von zwei positiven Irrationellen	91—95

V. Kapitel: Die quadratischen Formen.

1. Einleitung	96—97
2. Die (binäre) quadratische Form $(a, b, c) = ax^2 + bxy + cy^2$. Eine fundamentale Identität. Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$; Unterschied zwischen Formen mit positiver und solchen mit negativer Diskriminante.	97—99
3. Beschränkung auf Formen mit Stammdiskriminanten; sie sind primitiv	99—100

Nr.	Seite
4. Darstellung einer Zahl m durch eine Form $ax^2 + bxy + cy^2$; eigentliche und uneigentliche Darstellungen. Bedingung der Darstellbarkeit. Jede eigentliche Darstellung gehört zu einer Wurzel der Kongruenz $x^2 \equiv D \pmod{4m}$	100—102
5. Lineare Transformation einer Form. Äquivalenz (eigentliche und uneigentliche) zweier Formen. Klassen äquivalenter Formen, repräsentierende Formen	102—105
6. Zurückführung der Darstellung einer Zahl auf die Frage der Äquivalenz	105—106
7. Geometrische Deutung einer Form durch ein Punktgitter; die Gitterzahlen. Der Fall einer negativen Diskriminante	106—110
8. Der Fall einer positiven Diskriminante	110—112
9. Beziehung zwischen den Gitterzahlen äquivalenter Formen	112—114
10. Äquivalenten Formen entspricht dasselbe Punktgitter, nur mit verschiedener Bildung des Elementarparallelogramms; Unterschied zwischen eigentlicher und uneigentlicher Äquivalenz	114—117
11. Entgegengesetzte Formen und ihre Gitter	117—119
12. Die Hauptformen mit der Diskriminante D , ihre Gitter und Gitterzahlen	119—120
13. Die Wurzeln einer quadratischen Form. Eigentliche Äquivalenz zweier Formen ist identisch mit derjenigen ihrer gleichnamigen Wurzeln.	
Die Gesamtheit Ω der Zahlen $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$	121—122
14—16. Der Fall $D < 0$. Reduzierte Zahlen und Formen; ihre Anzahl ist endlich, desgleichen die Anzahl der Klassen äquivalenter Zahlen oder Formen. Entscheidung über die Äquivalenz zweier Formen	122—129
17. Geometrische Deutungen der Reduktion	129—131
18. u. 19. Der Fall $D > 0$. Reduzierte Zahlen; ihre Anzahl ist endlich. Periodizität des Kettenbruchs für jede (positive) Zahl der Gesamtheit Ω , insbesondere für eine reduzierte Zahl	131—136
20. Perioden reduzierter Zahlen; endliche Anzahl der Klassen äquivalenter Zahlen oder Formen. Entscheidung über die Äquivalenz zweier Formen	136—138
21. Perioden reduzierter Formen	138—141
22. Geometrische Deutung der Reduktion	141—143

Zweiter Abschnitt.

Der quadratische Zahlkörper.

I. Kapitel: Zahlen, Moduln, Ideale des Körpers.

1. Algebraische, insbesondere ganze algebraische Zahlen. Der aus einer Quadratwurzel \sqrt{d} gebildete Zahlkörper zweiten Grades \mathfrak{K} ; allgemeine Form $\omega = \frac{r + s\sqrt{d}}{t}$ seiner Zahlen 144—146
2. Konjugierte Zahlen, Norm einer Zahl. Unabhängige Zahlen. Im quadratischen Körper \mathfrak{K} ist jede Zahl ω durch zwei unabhängige Zahlen ω_1, ω_2 darstellbar; Basis von \mathfrak{K} , Übergang von einer Basis zu einer anderen. Diskriminante $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ einer Basis; sie ist rational . . 146—149

Nr.	Seite
3. Die ganzen Zahlen in \mathfrak{K} ; ihre Gesamtheit \mathfrak{g} ist ein Modul $[1, \theta]$, wo $\theta = \frac{D + \sqrt{D}}{2}$, die Grundzahl $D = d \equiv 1$ oder $D = 4d$, $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$	149—152
4. Ganze Zahlen in \mathfrak{K} sind, wenn rational, ganze Zahlen in \mathfrak{R} . Durch Addition, Subtraktion, Multiplikation ganzer Zahlen entstehen ganze Zahlen. Jede nicht ganze Zahl ist Quotient zweier ganzen Zahlen. Die ganzen Zahlen sind die Gitterzahlen für die Hauptformen mit der Diskriminante D	152—154
5. Andere Moduln des Körpers \mathfrak{K} ; zweigliedrige Moduln $\mathfrak{m} = [\omega_1, \omega_2]$ ihre verschiedenen Basen, ihre Diskriminante $\Delta(\mathfrak{m})$, sie ist eine rationale ganze Zahl	154—156
6. Jeder in \mathfrak{g} enthaltene Modul \mathfrak{m} ist ein zweigliedriger Modul	156—158
7. Kongruenz ganzer Zahlen des Körpers in bezug auf einen solchen Modul \mathfrak{m} ; die Norm $\mathfrak{N}(\mathfrak{m})$ des Moduls	158—160
8. Die Gestalt $\mathfrak{m} = m \cdot [1, \omega]$ des zweigliedrigen Moduls. Seine Ordnung $\mathfrak{o} = [1, k\theta]$, $k = \mathfrak{N}(\mathfrak{o})$. Charakteristische Eigenschaft jeder Ordnung des Körpers \mathfrak{K} . Die Gesamtheit \mathfrak{g} ist eine Ordnung	160—163
9. Ideale des Körpers. Jedes Ideal hat die Gestalt $j = sa \cdot [1, \omega]$, wo $a\omega = h + \theta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}$, $a > 0$, $b^2 \equiv D \pmod{4a}$	163—165
10. Jedem Ideale j ist eine quadratische Form (a, b, c) mit der Diskriminante D und positivem a zugeordnet, und umgekehrt	165—167
11. Äquivalenz zweier Ideale; sie entspricht durchaus der Äquivalenz der beiden zugeordneten Formen. Idealklassen identisch mit Formenklassen. Die Anzahl h der Idealklassen ist endlich. Die Hauptklasse H der Hauptideale $g\zeta$	167—169
12. Multiplikation von Idealen und Zusammensetzung von Idealklassen	169—171
13 u. 14. Jede Idealklasse C gehört zu einem Exponenten e , der ein Teiler von h ist, so daß $C^e = H$; für jedes Ideal j ist j^h ein Hauptideal $g\zeta$; zu jedem Ideal j gibt es ein Ideal j_1 , für welches $j \cdot j_1$ ein Hauptideal wird	171—175

II. Kapitel: Die Einheiten des quadratischen Körpers.

1. Teiler einer ganzen Zahl des Körpers; jede solche Zahl ist nur in eine endliche Anzahl von Faktoren zerlegbar, deren Norm von ± 1 verschieden ist	175—177
2. Die Teiler von 1 oder die Einheiten des Körpers. Ihr Zusammenhang mit den Darstellungen der Eins durch die Hauptformen mit der Diskriminante D . Ihr allgemeiner Ausdruck	
$\varepsilon = \frac{t + u\sqrt{D}}{2},$	
wo t, u die Auflösungen der Pellischen Gleichung $t^2 - Du^2 = 4$. Anzahl der letzteren für den Fall $D < 0$.	177—179
3 u. 4. Im Falle $D > 0$ ist die Anzahl der Auflösungen unendlich groß; ihre Bestimmung mittels des Kettenbruchs für eine reduzierte Zahl	
$\omega_0 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$	179—183
5. Zurückführung aller Einheiten auf eine Fundamenteleinheit, bzw. aller Auflösungen der Pellischen Gleichung auf eine Fundamentalauflösung	183—185

	Seite
Nr.	
6. Die automorphen Transformationen einer quadratischen Form . . .	185—187
7. Bestimmung aller eigentlichen Darstellungen einer Zahl m durch eine gegebene Form. Ausführliche Behandlung eines numerischen Beispiels	188—199
III. Kapitel: Die Teilbarkeit im quadratischen Körper.	
1. Die Zerlegbarkeit einer ganzen Zahl des Körpers \mathfrak{K} ist nicht immer eindeutig	200
2. Andere Fassung der Teilbarkeit, Zurückführung auf diejenige der Ideale	200—202
3. Faktor und Teiler eines Ideals, Nachweis ihrer Identität	202—203
4. Größter gemeinsamer Teiler zweier Ideale; relativ prime Ideale . . .	203—204
5. Kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier Ideale	204—205
6. Zwei Sätze von relativ primen Idealen	205—206
7. Primideale und ihre charakteristische Eigenschaft	206—207
8. Fundamentalsatz von der eindeutigen Zerlegbarkeit eines Ideals in Primidealfaktoren	207—209
9. Kongruenzen nach einem Primidealmodul	209—211
10. Der <i>Fermatsche</i> Satz im quadratischen Körper	211—212
11. Ein Hilfssatz	212—214
12. Die Primideale des quadratischen Körpers; Satz über die Zerlegung des Ideals g^p in Primidealfaktoren	214—218
IV. Kapitel: Ideale und Gitterzahlen.	
1. Ein Hilfssatz von Repräsentanten einer Idealklasse	219—220
2. „Einige“ Ideale und Formen. Das Produkt zweier einigen Ideale j_1, j_2 ; $\mathfrak{R}(j_1 j_2) = \mathfrak{R}(j_1) \cdot \mathfrak{R}(j_2)$	220—224
3. Allgemeine Gültigkeit dieser Formel für irgend zwei Ideale.	224—225
4. Komposition quadratischer Formen und Formenklassen. Gruppe der Ideal- oder Formenklassen, Darstellung aller Klassen durch fundamentale	225—229
5. Haupt- und Nebengitter von Formen, Zusammensetzung von Gittern	229—231
6. Orientierung der Gitter gegen das Hauptgitter im Falle einer negativen Diskriminante	231—234
7. Das entsprechende im Falle einer positiven Diskriminante	234
8. Reziproken Klassen entsprechen konjugierte Gitter	234—236
9. Die Gesamtheit \mathfrak{G} aller Haupt- und Nebengitterzahlen; sie sind algebraisch ganz; ihre Teilbarkeit	236—238
10 u. 11. Ideale Zahlen. Jede ideale Zahl η erzeugt ein Ideal $j(\eta)$ des Körpers als Gesamtheit aller seiner durch η teilbaren ganzen Zahlen. Jedes seiner Ideale wird so erzeugt	238—240
12. Einheiten in \mathfrak{G} ; $j(\eta_1 \eta_2) = j(\eta_1) \cdot j(\eta_2)$; jede Gruppe assoziierter Zahlen erzeugt je ein- und dasselbe Ideal	240—242
13. Die Teilbarkeit der Zahlen in \mathfrak{G} ist identisch mit derjenigen der durch sie erzeugten Ideale. Ideale Primzahlen; sie erzeugen die Primideale; ihre charakteristische Eigenschaft.	242—243
14. Der Fundamentalsatz von der eindeutigen Zerlegbarkeit der Zahlen der Gesamtheit \mathfrak{G} in ideale Primfaktoren. Derselbe Satz für die ganzen Zahlen des Körpers und der wahre Charakter dieser Zerlegbarkeit. Zerlegung einer rationalen Primzahl. — Literaturhinweis	243—246
Sachregister	247—252