

# INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort . . . . .	XI
Vorwort der Verfasser zur deutschen Ausgabe . . . . .	XIII
Einleitung . . . . .	XXI

## ERSTER TEIL

### Die Darstellungen der komplexen unimodularen Gruppe $\mathfrak{G}$

#### KAPITEL I. *Die Hauptserie von Darstellungen der komplexen unimodularen Gruppe $\mathfrak{G}$*

§ 1. Konstruktion einer Darstellung der Hauptserie . . . . .	1
§ 2. Einige Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$ . . . . .	3
1. Die Untergruppe $K$ . 2. Die Untergruppe $H$ . 3. Die Untergruppe $Z$ .	
4. Die Untergruppe $Z'$ . 5. Die Untergruppe $D$ .	
§ 3. Kanonische Zerlegungen; analytische Beschreibung der Mannigfaltigkeit $Z'$ .	8
1. Zerlegung der Elemente der Gruppe $K$ . 2. Zerlegung der Elemente der	
Gruppe $H$ . 3. Zerlegung der Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ . 4. Analytische Be-	
schreibung der Mannigfaltigkeit $Z'$ .	
§ 4. Integralbeziehungen . . . . .	11
1. Integralbeziehungen auf der Gruppe $K$ . 2. Integralbeziehungen auf der	
Gruppe $H$ . 3. Integralbeziehungen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ . 4. Eine Formel für die	
Transformation des Maßes auf $Z$ .	
§ 5. Beschreibung der Darstellungen der Hauptserie und ihre Irreduzibilität . .	17
1. Beschreibung der Darstellungen der Hauptserie. 2. Formeln für diese Dar-	
stellungen in Parametern. 3. Irreduzibilität der Darstellungen der Hauptserie.	

#### KAPITEL II. *Beschreibung der Darstellungen der Hauptserie mit Hilfe der unitären Untergruppe. Zusammenhang zwischen den Darstellungen der unimodularen Gruppe und ihrer unitären Untergruppe. Kugelfunktionen . . . . .*

29

§ 6. Die unitäre Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$ . . . . .	29
1. Die Untergruppen $\mathfrak{U}$ und $\Gamma$ ; kanonische Zerlegung. 2. Beschreibung der	
Mannigfaltigkeit $Z'$ mit Hilfe der Gruppe $\mathfrak{U}$ .	
§ 7. Integralbeziehungen . . . . .	30
1. Integralbeziehungen auf der Gruppe $\mathfrak{U}$ . 2. Eine Integralbeziehung auf der	
Gruppe $\mathfrak{G}$ . 3. Eine Beziehung zwischen den Maßen $d\mu(\bar{u})$ und $d\mu(z)$ . 4. Eine	
Formel für die Transformation des Maßes $d\mu(\bar{u})$ . 5. Berechnung der Konstanten $c$ .	
§ 8. Eine zweite Methode der Beschreibung der Darstellungen der Hauptserie . .	38

§ 9. Kugelfunktionen . . . . .	41
1. Bedingung für die Existenz eines Vektors, der bezüglich aller Operatoren $T_u$ invariant ist. 2. Definition der Kugelfunktion und ihr Integralausdruck. 3. Berechnung der Kugelfunktion.	
§ 10. Zerlegung nach den Darstellungen einer unitären Untergruppe . . . . .	49
KAPITEL III. <i>Die ausgearteten Serien der irreduziblen unitären Darstellungen der Gruppe <math>\mathfrak{G}</math></i> . . . . .	53
§ 11. Einige Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$ . . . . .	54
1. Die Untergruppe $K$ . 2. Die Untergruppe $H$ . 3. Die Untergruppe $Z$ . 4. Die Untergruppe $Z'$ . 5. Die Untergruppe $D$ .	
§ 12. Einige Beziehungen zwischen den eingeführten Untergruppen . . . . .	58
1. Darstellung der Elemente der Gruppe $K$ . 2. Darstellung der Elemente der Gruppe $H$ . 3. Darstellung der Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ . 4. Restklassen nach $K$ .	
§ 13. Integralbeziehungen . . . . .	61
1. Integralbeziehungen auf der Gruppe $K$ . 2. Integralbeziehungen auf der Gruppe $H$ . 3. Integralbeziehungen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ . 4. Eine Formel für die Transformation des Maßes $d\mu(z)$ .	
§ 14. Die Hauptserien von irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ . . . . .	63
1. Beschreibung der Hauptserien. 2. Formeln für die Darstellungen der ausgearteten Serien in Parametern. 3. Irreduzibilität der Darstellungen der ausgearteten Hauptserien.	
§ 15. Beschreibung der Darstellungen der ausgearteten Serien mit Hilfe der unitären Untergruppe . . . . .	72
1. Beschreibung der Mannigfaltigkeit $Z'$ . 2. Integralbeziehungen. 3. Eine zweite Methode der Beschreibung der Darstellungen der ausgearteten Serien. 4. Zerlegung nach den Darstellungen der unitären Untergruppe.	
KAPITEL IV. <i>Die ergänzenden Serien von irreduziblen unitären Darstellungen der Gruppe <math>\mathfrak{G}</math></i> . . . . .	76
§ 16. Beschreibung einiger Transitivitätsgebiete im Raum der Paare $(z_1, z_2)$ . . . . .	78
1. Die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_r$ . 2. Das Maß in $\mathfrak{M}_r$ .	
§ 17. Beschreibung der Darstellungen der ergänzenden Serien . . . . .	81
1. Definition von $\alpha(g)$ und des Skalarprodukts. 2. Vereinfachende Umformung von (17.4). 3. Die Bedingung der Positivdefinitheit der Form (17.4). Vervollständigung des Raumes $\mathfrak{H}$ . 4. Die Darstellungen der ergänzenden Serie. Die ergänzenden ausgearteten Serien von Darstellungen.	
§ 18. Die Transitivitätsgebiete der Paarmenge. Eine andere Schreibweise der Darstellungen der ergänzenden Serie . . . . .	88
1. Zweiseitige Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $K$ . Eine andere Schreibweise der Darstellungen der ergänzenden Serie.	
KAPITEL V. <i>Die Spur in den Darstellungen der komplexen unimodularen Gruppe</i> . . . . .	92
§ 19. Die Spur in den Darstellungen der Hauptserie . . . . .	93
1. Der Gruppenring der Gruppe $\mathfrak{G}$ . 2. Zusammenhang zwischen den Darstellungen der Gruppe und den Darstellungen des Gruppenringes. 3. Der Kern des Operators $T_x$ ; hinreichende Bedingungen für die Existenz der Spur. 4. Funktionen $x(g)$ , für die der Operator $T_x$ eine Spur besitzt. 5. Ein Ausdruck für die Spur durch ein Integral über die Gruppe $Z$ .	

§ 20.	Ein Ausdruck für die Spur in den Darstellungen der Hauptserie durch ein Integral über die Gruppe $\mathfrak{G}$ . . . . .	99
	1. Zerlegungen der Form $k = \zeta^{-1}\delta\zeta$ . 2. Zerlegungen der Form $g = z^{-1}kz$ . 3. Eine Integralbeziehung. 4. Die Formel für die Spur.	
§ 21.	Die Spur in den Darstellungen der ausgearteten Hauptserien . . . . .	104
	1. Existenzbedingungen der Spur eines Operators $T_x$ in den Darstellungen der ausgearteten Serien. 2. Eine Zerlegung der Form $k = \zeta^{-1}\delta\zeta$ . 3. Eine Zerlegung der Form $g = z^{-1}kz$ . 4. Eine Integralbeziehung. 5. Die Formel für die Spur in der ausgearteten Hauptserie.	
§ 22.	Die Spur in den Darstellungen der ergänzenden Serien . . . . .	111
	1. Der Kern des Operators $T_x$ im Falle der Darstellungen der ergänzenden Serien. 2. Ein Ausdruck für die Spur durch den Kern. 3. Formeln für die Spur in den ergänzenden Serien.	
§ 23.	Stetigkeit der Spur und Vollstetigkeit der Operatoren $T_x$ ; Äquivalenzkriterien . . . . .	115
	1. Vollstetigkeit der Operatoren $T_x$ . 2. Stetigkeit der Spur in den Darstellungen der Hauptserien. 3. Ein Hilfssatz über Darstellungen. 4. Äquivalenzkriterien. 5. Der Fall einer beliebigen Permutation der Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_r$ .	
<b>KAPITEL VI. Ein Analogon zur Formel von Plancherel im Falle der komplexen unimodularen Gruppe . . . . .</b>		<b>124</b>
§ 24.	Einige Integralbeziehungen . . . . .	127
	1. Die Untergruppe $E$ und die Zerlegung der Form $g = u_1\epsilon u_2$ . 2. Eine Integralbeziehung auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ . 3. Eine Formel für den Übergang vom Integral über $d\mu(\zeta)$ zu einem Integral über $d\mu(\bar{u})$ .	
§ 25.	Ein Ausdruck für die Funktion $I_\delta$ in Parametern . . . . .	133
	1. Übergang zu einem Integral über die Gruppe $\mathfrak{U}$ ; die Funktion $\tilde{f}(u, \epsilon')$ . 2. Parametrisierung der Gruppe der unitären Matrizen. 3. Ein Ausdruck für die Diagonalelemente der Matrix $\epsilon$ durch Parameter. 4. Ein Ausdruck für die Funktion $I_\delta$ . 5. Ein Ausdruck für die Elemente der Matrix $u$ in Parametern. 6. Ausdrücke für die Elemente $v_{p,n}, v_{p,n-1}$ der Matrix $v$ durch Parameter.	
§ 26.	Ein Ausdruck für $x(\epsilon)$ durch die Funktion $I_\delta$ . . . . .	143
	1. Der Differentialoperator $L$ . 2. Anwendung des Operators $L$ auf die Funktion $I_\delta$ . 3. Das Verschwinden des Ausdrucks $(M_{pq}I_q^{(2)})_{\delta=\epsilon}$ .	
§ 27.	Ein Analogon zur Formel von Plancherel . . . . .	156
	1. Eine Formel für $x(\epsilon)$ , ausgedrückt durch die Spur. 2. Ableitung des Analogons zur Formel von Plancherel.	

## ZWEITER TEIL

### Die unitären Darstellungen der orthogonalen Gruppe und der symplektischen Gruppe $\mathfrak{G}$

<b>KAPITEL VII. Die Hauptserie von Darstellungen der Gruppe <math>\mathfrak{G}</math> . . . . .</b>		<b>163</b>
§ 28.	Einige Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$ ; kanonische Zerlegungen . . . . .	165
	1. Basiswahl. 2. Definition der wichtigsten Untergruppen. 3. Zerlegung der Elemente der Gruppe $H$ . 4. Zerlegung der Elemente der Gruppe $K$ . 5. Zerlegung der Form $g = kz$ . 6. Zerlegung der Form $g = ku$ . 7. Zerlegung der Form $k = \zeta^{-1}\delta\zeta$ . 8. Zerlegung der Form $g = z^{-1}kz$ . 9. Zerlegung der Form $g = u_1\epsilon u_2$ . 10. Restklassen nach $K$ .	

§ 29. Integralbeziehungen . . . . .	173
1. Parameter und Maß in der Gruppe $Z$ . 2. Parameter und Maß in der Gruppe $Z$ . 3. Parameter und Maß in der Gruppe $D$ . 4. Parameter in der Gruppe $K$ . 5. Integralbeziehungen und Maße in der Gruppe $K$ . 6. Parameter, Integralbeziehungen und Maße in der Gruppe $H$ . 7. Integralbeziehungen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ .	
§ 30. Beschreibung der Hauptserie von Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ . . . . .	192
1. Beschreibung der Darstellungen der Hauptserie mit Hilfe der Untergruppe $Z$ . 2. Formeln für die Darstellungen der Hauptserie in Parametern. 3. Beschreibung der Darstellungen der Hauptserie mit Hilfe der unitären Untergruppe. 4. Kugelfunktionen.	
KAPITEL VIII. <i>Ausgeartete und ergänzende Serien von Darstellungen der Gruppe <math>\mathfrak{G}</math></i> . . . . .	199
§ 31. Einige weitere Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$ . . . . .	200
1. Definition von Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$ . 2. Kanonische Zerlegungen. 3. Restklassen nach $K$ .	
§ 32. Unabhängige Parameter, Maße und Integralbeziehungen . . . . .	205
1. Unabhängige Parameter und Maße in der Gruppe $Z$ . 2. Parameter und Maße in der Gruppe $Z$ . 3. Parameter und Maße in der Gruppe $D$ . 4. Parameter in der Gruppe $K$ . 5. Integralbeziehungen und Maße in der Gruppe $K$ . 6. Parameter, Integralbeziehungen und Maße in der Gruppe $H$ . 7. Integralbeziehungen auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ .	
§ 33. Die ausgearteten Hauptserien von Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ . . . . .	214
1. Beschreibung der ausgearteten Hauptserien mit Hilfe der Gruppe $Z$ . 2. Beschreibung der ausgearteten Hauptserien mit Hilfe der Gruppe $U$ . 3. Zerlegung nach den Darstellungen der unitären Untergruppe.	
§ 34. Die ergänzenden Serien von Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ . . . . .	217
1. Die Mengen $Z_\tau$ . 2. Die Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_\tau$ . 3. Das Maß in der Menge $Z_\tau$ . 4. Definition der Funktion $\alpha(g)$ und des Skalarprodukts in den ergänzenden Serien. 5. Ein Ausdruck für die Form $(f_1, f_2)$ in Parametern. 6. Die Bedingung der Positivdefinitheit der Form $(f_1, f_2)$ ; Vervollständigung des Raumes $\mathfrak{S}'$ . 7. Beschreibung der ergänzenden Serien von Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ .	
KAPITEL IX. <i>Die Spur in den Darstellungen der Gruppe <math>\mathfrak{G}</math></i> . . . . .	227
§ 35. Existenzbedingungen und Formeln für die Spur . . . . .	227
1. Die Spur in der nichtausgearteten Hauptserie. 2. Die Spur in den Darstellungen der ausgearteten Hauptserien. 3. Die Spur in den Darstellungen der ergänzenden Serien.	
§ 36. Stetigkeit der Spur und Vollstetigkeit der Operatoren $T_x$ ; Äquivalenzkriterien . . . . .	231
1. Vollstetigkeit der Operatoren $T_x$ . 2. Stetigkeit der Spur in den Darstellungen der Hauptserie. 3. Äquivalenzkriterien.	
Literaturverzeichnis . . . . .	233

## ANHANG I

**I. M. Gelfand und M. A. Neumark**

<i>Unitäre Darstellungen einer unimodularen Gruppe, die die Einheitsdarstellung der unitären Untergruppe enthalten.</i> . . . . .	237
Aus „Arbeiten der Moskauer math. Gesellschaft“ Bd. 1 (1952), 423—475.	
Einleitung . . . . .	238
§ 1. Die Algebra $R_0$ der Funktionen der zweiseitigen Restklassen der Gruppe $\mathfrak{G}$ nach der Untergruppe $\mathfrak{H}$ . . . . .	240
1. Die Gruppenalgebra der Gruppe $\mathfrak{G}$ . 2. Definition der Algebra $R_0$ . 3. Die Kugelfunktionen der Klasse 1. 4. Zusammenhang zwischen den Darstellungen der Klasse 1 und den maximalen Idealen der Algebra $R_0$ .	
§ 2. Die maximalen Ideale der Algebra $R_0$ . . . . .	249
1. Realisierung der Algebra $R_0$ . 2. Die Kugelfunktionen der nichtausgearteten Hauptserie von Darstellungen der Klasse 1. 3. Die Kugelfunktionen ausgearteter Hauptserien. 4. Die Kugelfunktionen der Nebenserien. 5. Der Differentialoperator $L$ . 6. Die Algebra $\mathfrak{S}$ und $R_0''$ . 7. Homomorphismen der Algebra $\mathfrak{S}$ in den Körper der komplexen Zahlen. 8. Die maximalen Ideale der Algebra $R_0$ .	
§ 3. Beschreibung aller irreduziblen unitären Darstellungen der Klasse 1 . . . . .	269
1. Die symmetrischen maximalen Ideale der Algebra $R_0$ . 2. Realisierung der Darstellungen der Klasse 1. 3. Ein unmittelbarer Überblick über die positiv definiten Funktionen $\varphi$ . 4. Positive Linearformen in den Algebren $R_0$ und $R$ . 5. Zerlegung jeder unitären Darstellung der Klasse 1 nach irreduziblen Darstellungen der Klasse 1.	
Literatur . . . . .	291

## ANHANG II

**I. M. Gelfand und M. I. Grajew**

<i>Über eine allgemeine Methode zur Zerlegung der regulären Darstellung einer Lieschen Gruppe in irreduzible Darstellungen.</i> . . . . .	293
Aus „Doklady der Akademie d. Wissenschaften SSSR“, Bd. 92 (1953), 221—224.	

## ANHANG III

**I. M. Gelfand und M. I. Grajew**

<i>Ein Analogon der Plancherelschen Formel für die klassischen Gruppen</i> . . . . .	301
Aus „Arbeiten der Moskauer math. Gesellschaft“ Bd. 4 (1955), 375—404.	
§ 1. Das Integral vom M. Rieszschen Typus . . . . .	304
§ 2. Das Analogon der Plancherelschen Formel für die komplexe unimodulare Gruppe . . . . .	311
§ 3. Das Analogon der Plancherelschen Formel für die orthogonale und die symplektische Gruppe . . . . .	322
Literatur . . . . .	333