

# Inhaltsverzeichnis

## Kapitel I. Unendliche Mengen

§ 1. Mengenoperationen . . . . .	1
§ 2. Eineindeutige Zuordnung . . . . .	5
§ 3. Abzählbare Mengen . . . . .	8
§ 4. Die Mächtigkeit des Kontinuums . . . . .	13
§ 5. Vergleich von Mächtigkeiten . . . . .	20

## Kapitel II. Punktmengen

§ 1. Häufungspunkte . . . . .	30
§ 2. Abgeschlossene Mengen . . . . .	33
§ 3. Innere Punkte und offene Mengen . . . . .	39
§ 4. Abstand und Trennbarkeit . . . . .	42
§ 5. Die Struktur offener und abgeschlossener Mengen . . . . .	46
§ 6. Kondensationspunkte. Die Mächtigkeit abgeschlossener Mengen. . . . .	51

## Kapitel III. Meßbare Mengen

§ 1. Das Maß beschränkter offener Mengen . . . . .	57
§ 2. Das Maß beschränkter abgeschlossener Mengen . . . . .	63
§ 3. Äußeres und inneres Maß beschränkter Mengen . . . . .	68
§ 4. Meßbare Mengen . . . . .	72
§ 5. Meßbarkeit und Maß als Bewegungsinvarianten . . . . .	77
§ 6. Klassen meßbarer Mengen . . . . .	82
§ 7. Allgemeine Bemerkungen über das Maßproblem . . . . .	87
§ 8. Der Satz von VITALI . . . . .	89

## Kapitel IV. Meßbare Funktionen

§ 1. Definition und einfachste Eigenschaften meßbarer Funktionen . . . . .	95
§ 2. Weitere Eigenschaften meßbarer Funktionen . . . . .	99
§ 3. Folgen meßbarer Funktionen. Konvergenz dem Maß nach . . . . .	102
§ 4. Die Struktur meßbarer Funktionen . . . . .	109
§ 5. Die WEIERSTRASSschen Sätze . . . . .	117

## Kapitel V. Das LEBESGUE-Integral beschränkter Funktionen

§ 1. Definition des LEBESGUE-Integrals . . . . .	124
§ 2. Grundlegende Eigenschaften des Integrals . . . . .	130
§ 3. Grenzübergang unter dem Integralzeichen . . . . .	137
§ 4. Vergleich des RIEMANN- und des LEBESGUE-Integrals . . . . .	140
× § 5. Aufsuchen einer Stammfunktion . . . . .	146

## Kapitel VI. Summierbare Funktionen

§ 1. Das Integral einer nichtnegativen meßbaren Funktion . . . . .	150
§ 2. Summierbare Funktionen mit beliebigem Vorzeichen . . . . .	159
§ 3. Grenzübergang unter dem Integralzeichen . . . . .	166

**Kapitel VII. Quadratisch summierbare Funktionen**

§ 1. Grundlegende Definitionen. Ungleichungen. Norm. . . . .	181
§ 2. Konvergenz im Mittel . . . . .	184
§ 3. Orthogonalsysteme . . . . .	193
§ 4. Der Raum $l^2$ . . . . .	204
§ 5. Linear unabhängige Systeme . . . . .	213
§ 6. Die Räume $L_p$ und $l_p$ . . . . .	218

**Kapitel VIII. Funktionen von endlicher Variation. Das STIELTJES-Integral**

§ 1. Monotone Funktionen . . . . .	227
§ 2. Abbildung von Mengen, Differentiation einer monotonen Funktion . . . . .	230
§ 3. Funktionen von endlicher Variation . . . . .	241
§ 4. Das HELLYsche Auswahlprinzip . . . . .	247
§ 5. Stetige Funktionen von endlicher Variation . . . . .	250
§ 6. Das STIELTJES-Integral . . . . .	255
§ 7. Grenzübergang unter dem STIELTJES-Integral . . . . .	261
§ 8. Lineare Funktionale. . . . .	266

**Kapitel IX. Absolut stetige Funktionen. Das unbestimmte LEBESGUE-Integral**

§ 1. Absolut stetige Funktionen . . . . .	270
§ 2. Differentialeigenschaften der absolut stetigen Funktionen . . . . .	273
§ 3. Stetige Abbildungen . . . . .	275
§ 4. Das unbestimmte LEBESGUE-Integral . . . . .	280
§ 5. Einführung einer neuen Veränderlichen im LEBESGUE-Integral . . . . .	290
§ 6. Punkte größter Dichte, approximative Stetigkeit . . . . .	294
§ 7. Ergänzungen zur Theorie der Funktionen von endlicher Variation und zur Theorie des STIELTJES-Integrals . . . . .	297
§ 8. Berechnung einer Stammfunktion . . . . .	301

**Kapitel X. Singuläre Integrale. Trigonometrische Reihen. Konvexe Funktionen**

§ 1. Fragestellung. . . . .	309
§ 2. Darstellung einer Funktion in einem gegebenen Punkt durch ein singuläres Integral . . . . .	314
§ 3. Anwendung auf die Theorie der FOURIER-Reihen . . . . .	319
§ 4. Weitere Eigenschaften der trigonometrischen Reihen und der FOURIER-Reihen . . . . .	328
§ 5. SCHWARZsche Ableitungen und konvexe Funktionen . . . . .	336
§ 6. Eindeutigkeit der Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe . . . . .	348

**Kapitel XI. Punktmengen im zweidimensionalen Raum**

§ 1. Abgeschlossene Mengen . . . . .	360
§ 2. Offene Mengen . . . . .	362
§ 3. Maßtheorie ebener Mengen . . . . .	366
§ 4. Meßbarkeit und Maß als Bewegungsinvarianten . . . . .	374
§ 5. Der Zusammenhang zwischen dem Maß einer ebenen Menge und dem Maß ihrer Schnitte . . . . .	380

<b>Kapitel XII. Meßbare Funktionen mehrerer Veränderlichen und ihre Integration</b>	
§ 1. Meßbare Funktionen. Erweiterung stetiger Funktionen . . . . .	385
§ 2. Das LEBESGUE-Integral und seine geometrische Bedeutung . . . . .	389
§ 3. Der Satz von FUBINI . . . . .	392
§ 4. Änderung der Reihenfolge der Integrationen . . . . .	397
<b>Kapitel XIII. Mengenfunktionen und ihre Anwendungen in der Integrationstheorie</b>	
§ 1. Absolut stetige Mengenfunktionen . . . . .	401
§ 2. Das unbestimmte Integral und seine Differentiation . . . . .	408
§ 3. Verallgemeinerung der bisherigen Ergebnisse . . . . .	410
<b>Kapitel XIV. Transfinite Zahlen</b>	
§ 1. Geordnete Mengen. Ordnungstypen . . . . .	415
§ 2. Wohlgeordnete Mengen . . . . .	421
§ 3. Ordnungszahlen . . . . .	424
§ 4. Transfinite Induktion . . . . .	427
§ 5. Die zweite Zahlklasse . . . . .	428
§ 6. Die Alephs . . . . .	431
§ 7. Das Axiom und der Satz von ZERMELO . . . . .	434
<b>Kapitel XV. Die BAIRESche Klassifikation</b>	
§ 1. Die BAIRESchen Klassen . . . . .	438
§ 2. Die BAIRESchen Klassen sind nicht leer . . . . .	444
§ 3. Die Funktionen der ersten Klasse . . . . .	451
§ 4. Halbstetige Funktionen . . . . .	462
<b>Kapitel XVI. Einige Verallgemeinerungen des LEBESGUE-Integrals</b>	
§ 1. Einführung . . . . .	471
§ 2. Definition des PERRON-Integrals . . . . .	472
§ 3. Grundeigenschaften des PERRON-Integrals . . . . .	474
§ 4. Das unbestimmte PERRON-Integral . . . . .	477
§ 5. Vergleich des PERRON-Integrals mit dem LEBESGUE-Integral . . . . .	480
§ 6. Eine abstrakte Integraldefinition und ihre Verallgemeinerung . . . . .	484
§ 7. Das DENJOY-Integral im engeren Sinne . . . . .	491
§ 8. Der Satz von H. HAKE . . . . .	494
§ 9. Der Satz von P. S. ALEXANDROW und H. LOOMAN . . . . .	501
§ 10. Das DENJOY-Integral im weiteren Sinne . . . . .	506
<b>Kapitel XVII. Funktionen mit nicht beschränkten Definitionsbereichen</b>	
§ 1. Das Maß einer nicht beschränkten Menge . . . . .	510
§ 2. Meßbare Funktionen . . . . .	512
§ 3. Integrale über nicht beschränkte Mengen . . . . .	513
§ 4. Quadratisch summierbare Funktionen . . . . .	515
§ 5. Funktionen von endlicher Variation. STIELTJES-Integrale . . . . .	516
§ 6. Unbestimmte Integrale und absolut stetige Mengenfunktionen . . . . .	520

**Kapitel XVIII. Aus der Funktionalanalysis**

§ 1. Metrische und insbesondere lineare normierte Räume . . . . .	523
§ 2. Kompaktheit . . . . .	530
§ 3. Kriterien für die Kompaktheit von Mengen in einigen Räumen . . . . .	536
§ 4. Der BANACHSche Fixpunktsatz und einige Anwendungen . . . . .	553

**Anhang**

I. Die Länge eines Kurvenbogens . . . . .	565
II. Ein Beispiel von STEINHAUS . . . . .	569
III. Einige Zusatzbemerkungen über konvexe Funktionen . . . . .	570

Literaturverzeichnis . . . . .	577
--------------------------------	-----

Namenregister . . . . .	584
-------------------------	-----

Sachregister . . . . .	585
------------------------	-----