

Inhaltsverzeichnis des ersten Bandes.

	Seite
Einleitung	1—56
Erste Vorlesung	1—13
Einleitung. Alter, Begründung und Abgrenzung der Arithmetik. — Geschichte der Arithmetik. Die orientalischen Völker. Die Arithmetik bei den Griechen. — Euklid. Die Elemente. Vollkommene Zahlen. Anzahl aller Primzahlen. Jede arithmetische Reihe enthält unendlich viele Primzahlen. — Diophant. Theon. Hypatia. — Die Araber. Die arabischen Ziffern.	
Zweite Vorlesung	14—39
Niedergang der Wissenschaften im Mittelalter. — Die Arithmetik im siebzehnten und achtzehnten Jahrhundert. — Fermat und einige von seinen Sätzen. — Beweis des sog. kleinen Fermatschen Satzes. — Die Polygonalzahlen. — Der sog. große Fermatsche Satz: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ist nur für $n = 2$ in ganzen Zahlen lösbar. — Euler; sein Leben und einige seiner arithmetischen Arbeiten. — Die vollkommenen und die befreundeten Zahlen. — Diophantische Probleme. — Eulers Lösung des Fermatschen Problems in den Fällen $n = 2$ und $n = 4$. — Die Pellsche Gleichung. — Das Reciprocitätsgesetz. — Legendre und sein Essai sur la théorie des nombres.	
Dritte Vorlesung	40—56
Die beiden Hauptrichtungen der Arithmetik im neunzehnten Jahrhundert. — Gauss und der systematische Aufbau der Arithmetik in den disquisitiones arithmeticae. — Inhaltsübersicht. — Das Problem der Kreisteilung. — Dirichlet, Jacobi, Kummer. — Theorie der algebraischen Zahlen; arithmetische Behandlung dieses Problems. — Dirichlet und die Anwendung der Analysis auf Probleme der Zahlentheorie. — Beispiele: Die Binomial- und Polynomkoeffizienten sind ganze Zahlen. — Einige Untersuchungen Eulers aus diesem Gebiete.	
Erster Teil. Teilbarkeit und Kongruenz im Gebiete der Zahlen	57—142
Vierte Vorlesung	57—64
Systematische Arithmetik. — Der Zahlbegriff. — Die Ordnungszahlen. — Die Kardinalzahlen. — Der Begriff der Anzahl. — Addition. — Vertauschbarkeit der Summanden. — Die Multiplikation. — Vertauschbarkeit der Faktoren eines Produktes.	

	Seite
Fünfte Vorlesung	65—72
Die Dekomposition der Zahlen. — Bestimmung der Teiler einer Zahl. — Die Anzahl der auszuführenden Operationen ist endlich. — Auf- stellung aller Teiler einer Zahl. — Die Primzahlen. — Elementare Eigenschaften der Primzahlen. — Zerlegung einer Zahl in ihre Prim- faktoren. — Beweis der Eindeutigkeit jener Zerlegung.	
Sechste Vorlesung	73—82
Darstellung der ganzen Zahlen durch ihre Exponentensysteme. — Die Teilbarkeit einer Zahl durch eine andere. — Die gemeinsamen Teiler zweier Zahlen und ihr größter gemeinsamer Teiler. — Teiler- fremde Zahlen. — Die gemeinsamen Multipla zweier Zahlen und ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches. — Ausdehnung auf beliebig viele Zahlen. — Hauptsätze über die Teilbarkeit der ganzen Zahlen. — Die Summe der n^{ten} Potenzen aller Divisoren einer Zahl.	
Siebente Vorlesung	83—95
Die Kongruenz der Zahlen. — Kongruenz und Äquivalenz. — Die Grundregeln für das Rechnen mit Kongruenzen. — Kongruenzen für einen Primzahlmodul. — Anwendungen.	
Achte Vorlesung	96—105
Die höheren Kongruenzen. — Aufsuchung ihrer Wurzeln. — Haupt- sätze über die höheren Kongruenzen. — Anzahl der Wurzeln einer Kongruenz. — Kongruenzen für einen Primzahlmodul. — Anwen- dungen: Der Wilsonsche und der Fermatsche Satz.	
Neunte Vorlesung	106—120
Lineare Kongruenzen. Bedingung für ihre Auflösbarkeit. Anzahl ihrer Wurzeln. — Auflösung der linearen Kongruenzen; erste Me- thode: Reduktion auf lineare Kongruenzen für einen Primzahlmodul. — Die Einheiten modulo p . — Beweis des Wilsonschen Satzes. — Zweite Lösungsmethode mit Hilfe der Theorie der Kettenbrüche.	
Zehnte Vorlesung	121—130
Anwendung der Theorie der linearen Kongruenzen. — Die Einheiten und die Teiler der Null für einen zusammengesetzten Modul m . — Die Anzahl $\varphi(m)$ der Einheiten modulo m . — Die Verallgemeinerung des Fermatschen Satzes. — Bestimmung der Zahl $\varphi(m)$. — Die Ver- allgemeinerung des Wilsonschen Satzes.	
Elfte Vorlesung	131—142
Die Invarianten der Kongruenz. — Arithmetische und analytische Invarianten. — Jede Invariante der Kongruenz ist eine symmetrische Funktion aller kongruenten Zahlen. — Arithmetische Untersuchung der Fundamentalinvariante der Kongruenz.	
Zweiter Teil. Die Rationalitätsbereiche und die Theorie der Modul- systeme	143—241
Zwölfte Vorlesung	143—153
Die Kongruenz nach einem Modulsystem. — Teiler eines Modul- systems. — Äquivalente Modulsysteme. — Reduktion der Modul- systeme. — Theorie der ganzzahligen Formen. — Äquivalente Formen. — Einheitsformen.	

Dreizehnte Vorlesung	154—169
Die Rationalitätsbereiche. — Allgemeine Theorie der Modulsysteme. — Allgemeine Theorie der Formen. — Der größte gemeinsame Teiler zweier Divisorensysteme. — Die Komposition der Modulsysteme. — Anwendungen. — Die Verallgemeinerung des Fermatschen Theoremes.	
Vierzehnte Vorlesung	170—176
Der Rationalitätsbereich von einer Veränderlichen. — Das Eukli- dische Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers für diesen Bereich. — Die Modulsysteme erster und zweiter Stufe. — Beispiele. — Reine und gemischte Modulsysteme zweiter Stufe.	
Fünfzehnte Vorlesung.	177—184
Die reinen Divisorensysteme erster Stufe oder die ganzen ganz- zähligen Funktionen. — Ihre Zerlegung in irreduktible Faktoren. — Beweis der Eindeutigkeit dieser Zerlegung. — Hilfsätze.	
Sechzehnte Vorlesung.	185—193
Die reinen Divisorensysteme zweiter Stufe. — Ihre charakteristischen Eigenschaften. — Die Anzahl der inkongruenten Größen ist stets endlich. — Die Einheiten. — Verallgemeinerung des Fermatschen Satzes. — Komplementäre Einheiten.	
Siebzehnte Vorlesung	194—201
Die Dekomposition der reinen Modulsysteme zweiter Stufe $(m, f_i(x))$. — Zerlegung derselben in die Systeme $(p^h, f_i(x))$. — Reduktion der einfachsten Systeme $(p, f_i(x))$. — Reduktion der Systeme $(p^2, f_i(x))$ und $(p^3, f_i(x))$. — Die reduzierte Form der Systeme zweiter Stufe.	
Achtzehnte Vorlesung.	202—211
Erste Reduktion eines beliebigen Modulsystemes (p^h, f_1, \dots, f_r) . — Weitere Reduktion desselben Systemes. — Beweis, daß das so ge- fundene System ein reduziertes ist.	
Neunzehnte Vorlesung	212—228
Die Teiler modulo p der ganzen Funktionen von x . — Der größte gemeinsame Teiler modulo p . — Die Primfunktionen modulo p . — Die Primmodulsysteme $(p, P(x))$. — Ihre Analogie mit den Prim- zahlen. — Eindeutigkeit der Zerlegung der ganzen Funktionen in Primfaktoren modulo p . — Zerlegung des Systemes $(p, f(x))$. — Prim- modulsysteme und unzerlegbare Modulsysteme. — Untersuchung des Bereiches $[x]$ für ein Primmodulsystem. — Der Fermatsche Satz und der Wilsonsche Satz für ein Primmodulsystem. — Zerlegung der Funktion $x^{p^n} - x$ modulo p . — Die einfachen Modulsysteme. — Ihre Fundamenteigenschaften. — Dekomposition eines beliebigen Divi- sorensystemes in einfache Systeme.	
Zwanzigste Vorlesung.	229—241
Die Modulsysteme im Bereiche von mehreren Veränderlichen. — Die Zerlegung der ganzen Größen in ihre Primfaktoren. — Die Ratio- nalitätsbereiche $\{x, y, \dots, s\}$. — Der Rang oder die Stufe der Divi- sorensysteme. — Geometrische Anwendungen. — Die unzerlegbaren und die Primmodulsysteme. — Der Bereich $\{x, y, s\}$ und die zu- gehörigen Primmodulsysteme. — Modulsysteme und Linearformen.	

	Seite
Dritter Teil. Anwendung der Analysis auf Probleme der Zahlentheorie	242—374
Einundzwanzigste Vorlesung	242—253
Zahlensysteme. — Neue Begründung der Fundamenteigenschaften der Funktion $\varphi(n)$. — Beweis einer arithmetischen Identität. — Die Zahlen ε_m . — Die summatorischen Funktionen. — Anwendungen: Die Fundamenteigenschaft der Zahlen ε_m . — Berechnung der Potenzsummen aller inkongruenten Einheiten modulo m .	
Zweiundzwanzigste Vorlesung	254—280
Analytischer Beweis der eindeutigen Zerlegbarkeit der Zahlen in ihre Primfaktoren. — Die Dirichletschen Reihen. — Ihre Konvergenz. — Eine Funktion kann nur auf eine Art durch eine Dirichletsche Reihe dargestellt werden. — Anwendungen: Analytische Begründung arithmetischer Sätze. — Bestimmung der Anzahl und der Summe aller Teiler einer Zahl. — Untersuchung der Funktion $\varphi(n)$. — Analytischer Beweis des Satzes, daß die Anzahl aller Primzahlen unendlich groß ist. — Analytischer Beweis arithmetischer Reziprocitätsgleichungen. — Anwendungen.	
Dreiundzwanzigste Vorlesung	281—298
Die Kreisteilungsfunktionen $x^n - 1$. — Die primitiven Funktionen $F_n(x)$ und ihre Eigenschaften. — Die Berechnung der primitiven Funktionen. — Die Kreisteilungsgleichungen und die Wurzeln der Einheit. — Die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln. — Anwendungen: Die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grenze.	
Vierundzwanzigste Vorlesung	299—325
Die arithmetische Funktion $\chi_n(M, N)$. — Ihre genaue Berechnung. — Anwendung: Bestimmung der Anzahl aller Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grenze. — Näherungsweise Berechnung der Funktion $\chi_n(M, N)$. — Die arithmetische Funktion $\mathfrak{A}_1(A, D)$. — Ihr genauer Wert. — Näherungsweise Berechnung dieser Funktion. — Anwendung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei beliebige Zahlen teilerfremd sind. — Der Mittelwert arithmetischer Funktionen. — Berechnung des Mittelwertes mit Hilfe der Eulerschen Summenformel. — Anwendungen. — Berechnung des Mittelwertes mit Hilfe der Dirichletschen Reihen.	
Fünfundzwanzigste Vorlesung	326—342
Die arithmetischen Funktionen von Zahlensystemen und ihre Mittelwerte. — Anwendungen: Die mittleren Werte der Funktionen $\varphi(n)$ und $\frac{\varphi(n)}{n}$. — Über die arithmetischen Funktionen, welche von den Divisoren einer Zahl abhängen und über die Mittelwerte derselben. — Die größeren und kleineren Divisoren einer Zahl.	
Sechszwanzigste Vorlesung	343—374
Der Mittelwert für die Anzahl der Divisoren. — Folgerungen aus diesem Resultate. — Die Summe der Divisoren. — Die Summe der reziproken Teiler. — Die Summe der Logarithmen aller Teiler. — Der Überschuss der Teiler von der Form $4n + 1$ über die von der Form $4n - 1$ und der Mittelwert dieser Anzahl.	

Vierter Teil. Allgemeine Theorie der Potenzreste und Beweis des Satzes über die arithmetische Progression.	375—496
Siebenundzwanzigste Vorlesung	375—388
Theorie der Potenzreste für einen zusammengesetzten und für einen Primzahlmodul. — Einteilung der Einheiten modulo p nach dem Exponenten, zu welchem sie gehören. — Die primitiven Wurzeln. — Theorie der Indices für einen Primzahlmodul. — Jacobis „Canon arithmeticus“. — Anwendungen: Die Auflösung linearer Kongruenzen. — Beweis des Wilsonschen Satzes. — Auflösung der reinen Kongruenzen für einen Primzahlmodul.	
Achtundzwanzigste Vorlesung	389—415
Die höheren Kongruenzen für einen Primzahlmodul. — Die Bedingung für die Existenz einer Kongruenzwurzel. — Erste Herleitung der Bedingungen für die Existenz von s inkongruenten Wurzeln einer Kongruenz. — Die Systeme oder Matrizen. — Der Rang der Systeme. — Zweite Herleitung der Bedingungen für die Existenz von s inkongruenten Wurzeln einer Kongruenz. — Die recurrierenden Reihen. — Ihre Ordnung. — Die Ordnung von ganzzahligen recurrierenden Reihen für einen Primzahlmodul. — Der Grad des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzzahligen Funktionen für einen Primzahlmodul.	
Neunundzwanzigste Vorlesung	416—437
Einteilung der Einheiten für einen zusammengesetzten Modul nach dem Exponenten, zu welchem sie gehören. — Existenzbeweis für die primitiven Wurzeln in Bezug auf eine Primzahlpotenz und das Doppelte einer solchen. — Die Einheiten modulo 2^n . — Die Indizesysteme der Einheiten für zusammengesetzte Moduln. — Anwendungen: Die Darstellung aller nicht äquivalenten reduzierten Brüche mit gegebenem Nenner. Die Entwicklung rationaler Brüche nach fallenden Potenzen einer Grundzahl. Die Anzahl der periodischen und nichtperiodischen Glieder dieser Entwicklung. — Anwendung auf die Theorie der Dezimalbrüche.	
Dreißigste Vorlesung	438—450
Es giebt unendlich viele Primzahlen von der Form $mh + r$, sobald $(m, r) = 1$ ist. — Beweis dieses Satzes für einige spezielle Fälle. — Schärfere Formulierung der Aufgabe. — Die Charaktere einer Zahl r modulo m . — Grundeigenschaften der Charaktere. — Der Hauptcharakter, die reciproken und die ambigen Charaktere.	
Einunddreißigste Vorlesung	451—464
Beispiel: Der Fall $m = 4$. Die Anzahl der Primzahlen von der Form $4n + 1$ und $4n - 1$ ist unendlich groß. — Aufstellung der Grundgleichung. — Abschätzung ihrer einzelnen Bestandteile. — Spezialisierung der Grundgleichung für die beiden möglichen Fälle und Beweis des Dirichletschen Satzes.	
Zweiunddreißigste Vorlesung	465—479
Der allgemeine Satz über die Primzahlen in einer arithmetischen Reihe. — Vereinfachung der Aufgabe. — Aufstellung der Grundgleichung. — Abschätzung ihrer Glieder. — Spezialisierung der	

Grundgleichung: Die dem Hauptcharakter entsprechende Gleichung.
 — Die den übrigen Charakteren entsprechende Gleichung. — Beweis des Dirichletschen Satzes. — Folgerung: Die Primzahlen verteilen sich nahezu gleichmäßig auf die $\varphi(m)$ Reihen $mx + r$.

Dreiunddreißigste Vorlesung 480—496

Beweis, daß die $(\varphi(m) - 1)$ Reihen $\sum \frac{\Omega^{(k)}(n)}{n}$ von Null verschieden sind. — Die den ambigen Charakteren entsprechenden Reihen. — Angabe einer unteren Grenze für ihren Zahlwert. — Die den komplexen Charakteren entsprechenden Reihen. — Bestimmung einer unteren Grenze für den absoluten Betrag derselben. — Über die Anwendung der Dirichletschen Methoden auf höhere Probleme der Arithmetik. — Die linearen, die quadratischen und die allgemeinen zerlegbaren Formen. — Die Theorie der Einheiten.

Anmerkungen zum ersten Bande. 497—509
