

TABLE DES MATIÈRES

Pages.

PROBLÈME n° 1. — 1° On demande la forme générale de la fonction $f(u, v)$ des deux variables u, v , telle que les deux expressions

$$du + f(u, v) dv, \quad du - f(u, v) dv$$

admettent respectivement deux facteurs intégrants μ, μ_1 dont le produit est égal à l'unité : $\mu\mu_1 = 1$.

2° Trouver les expressions générales de trois fonctions X, Y, Z des deux variables u, v telles que l'on ait identiquement

$$dX^2 + dY^2 = du^2 + Z^2 dv^2.$$

Que peut-on dire des courbes décrites par le point de coordonnées rectangulaires (X, Y) quand on donne une valeur constante à l'une des variables u, v ?

Y a-t-il quelque réciproque ? 1

PROBLÈME n° 2. — 1° Soit $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$. Démontrer que les deux expressions

$$dp = e^U (\cos U dx + \sin U dy),$$

$$dq = e^U (\sin U dx - \cos U dy)$$

sont deux différentielles exactes. Réciproque.

2° L'expression $pdx + qdy$ est elle-même la différentielle totale d'une fonction $Z(x, y)$ qui est la partie réelle d'une autre fonction analytique

$$F(z) = Z(x, y) + iW(x, y)$$

de la variable complexe $z = x + iy$.

Trouver la relation qui lie les deux fonctions $F^*(z), f(z)$. Comment faut-il prendre la fonction $f(z)$ pour que l'on ait

$$f(z) = iF(z) ?$$

3° Si $U(x, y)$ est une intégrale de l'équation de Laplace $\Delta U = 0$, déduire du calcul précédent qu'il existe une infinité d'intégrales $Z(x, y)$ de la même équation satisfaisant en outre à l'équation

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \tan U \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}.$$

De combien de paramètres dépendent ces fonctions ? 5

PROBLÈME n° 3. — Trouver les expressions générales des deux fonctions $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ telles que les deux équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned} dz &= P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy, \\ dz &= \lambda [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy] \end{aligned}$$

soient l'une et l'autre complètement intégrables. Trouver l'expression générale des fonctions $\lambda(x, y, z)$ telles que l'équation

$$dz = \lambda(x, y, z) [P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy]$$

soit aussi complètement intégrable.

Montrer qu'on peut rendre les résultats évidents par un changement de variables

9

PROBLÈME n° 4. — Pour que l'expression $dz + A dx + B dy$ admette un facteur intégrant indépendant de z , il faut et il suffit qu'elle soit de la forme $dz + z d\varphi + e^{-\varphi} d\psi$ et ψ étant des fonctions de x et de y

14

PROBLÈME n° 5. — On considère le système d'équations différentielles

$$(\Sigma) \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \quad \frac{dz}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

1° Démontrer que ce système (Σ) admet une intégrale première de la forme

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = C.$$

et que l'intégration s'achève par une quadrature quand on a obtenu cette intégrale première.

2° On demande à quelle condition doivent satisfaire les fonctions f et φ pour que les courbes intégrales (Γ) du système (Σ) soient situées sur des sphères ayant pour centre l'origine (les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires).

Si cette condition est satisfaite, les courbes (Γ) sont les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces (S) dépendant d'un paramètre.

3° Déterminer les courbes (Γ) et les surfaces (S) en supposant que l'on a

$$f = \frac{x(mz - y)}{y^2 + z^2}, \quad \varphi = \frac{x(mv + z)}{y^2 + z^2},$$

m étant constant

14

PROBLÈME n° 6. — Appliquer la méthode de J. Bertrand à l'équation

$$P dx + Q dy + R dz = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions linéaires de x, y, z satisfaisant à la condition d'intégrabilité

18

PROBLÈME n° 7. — Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations $r = f_1(x, y)$, $s = f_2(x, y)$, $t = f_3(x, y)$ soient compatibles.

APPLICATION. — Trouver à quelle condition doit satisfaire les fonctions $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ pour que les courbes intégrales de l'équation différentielle $A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2 = 0$ soient les projections sur le plan des xy des deux familles de lignes asymptotiques d'une surface..... 22

PROBLÈME n° 8. — Étant donné un système complètement intégrable de la forme

$$dz = p dx + q dy,$$

$$dp = (a_1 p + a_2 q + a_3 z) dx + (c_1 p + c_2 q + c_3 z) dy.$$

$$dq = (c_1 p + c_2 q + c_3 z) dx + (b_1 p + b_2 q + b_3 z) dy.$$

où a, b, c sont des fonctions de x et de y , l'intégrale générale est de la forme $z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$, z_1, z_2, z_3 étant trois intégrales linéairement distinctes et C_1, C_2, C_3 des constantes arbitraires..... 24

PROBLÈME n° 9. — Trouver l'équation aux dérivées partielles des surfaces décrites par une droite qui se meut en rencontrant une droite fixe sous un angle donné. Intégrer cette équation aux dérivées partielles..... 26

PROBLÈME n° 10. — Étant donné un plan P et un point O dans le plan, trouver l'équation générale de toutes les surfaces telles que si, par un point quelconque m de l'une d'elles, on mène la normale mn qui rencontre en n le plan P , puis la perpendiculaire mp à ce plan, l'aire du triangle Onp soit égale à une constante donnée..... 27

PROBLÈME n° 11. — Déterminer toutes les surfaces qui jouissent de la propriété suivante : p et n étant respectivement la projection sur xOy , d'un point quelconque m de la surface considérée et le point où la normale en m perce xOy , l'angle nOp est constant..... 29

PROBLÈME n° 12. — Déterminer toutes les surfaces qui satisfont à la condition

$$Op.mn = \lambda \overline{Om}^2,$$

dans laquelle λ désigne une constante donnée, O l'origine des coordonnées, m un point quelconque de l'une de ces surfaces, p le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan tangent en m , n la trace de la normale sur le plan xOy 30

PROBLÈME n° 13. — Trouver l'équation générale des surfaces telles que si, par un point m de l'une d'elles, on mène la normale mn terminée au plan des xy , la longueur mn soit égale à la distance On 31

PROBLÈME n° 14. — 1° Intégrer le système d'équations différentielles

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{-3x + 4y - z}{2}, \\ \frac{dy}{dt} = -x + z, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{3x - 12y + 9z}{2}. \end{cases}$$

En particulier, donner les expressions des inconnues x, y, z en fonction de t et des valeurs x_0, y_0, z_0 , de ces inconnues pour $t = 0$.

2° Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{-3x + 4y - z}{1} p + (-x + z) q = \frac{3x - 12y + 9z}{2}$$

où p et q sont les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la fonction inconnue $z(x, y)$.

Déterminer en particulier la surface intégrale de l'équation (E) qui contient l'axe Ox , c'est-à-dire pour laquelle $z(x, 0) = 0$; donner l'équation cartésienne de cette surface intégrale.

3° Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{-3x + 4y - z}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + (-x + z) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{3x - 12y + 9z}{1} \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

où $f(x, y, z)$ est la fonction inconnue à déterminer..... 33

PROBLÈME n° 15. — Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz et une droite D du plan Oxy représentée par les deux équations $z = 0, y = a$, soient $M(x, y, z)$ un point d'une surface S , m la projection de ce point M sur le plan des xy , T le point où le plan tangent en M rencontre la droite D . On demande l'équation générale des surfaces S telles que les trois points O, m, T soient en ligne droite.

Déterminer la fonction arbitraire de façon que la surface S passe par la courbe C représentée par les deux équations $x = h, z = f(y)$ 37

PROBLÈME n° 16. — On considère une surface S , rapportée aux coordonnées curvilignes u et v , dont l'élément linéaire est défini par

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2;$$

on se propose de faire correspondre à chaque point de cette surface un point

$$(1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

du plan des xy , de manière que, dans cette correspondance ponctuelle, les aires soient conservées.

Montrer que le problème admet une infinité de solutions. L'une des deux fonctions (1), x par exemple, peut être prise arbitrairement; après quoi, on pourra encore disposer arbitrairement de la ligne λ tracée sur S et qui correspondra à $y = 0$ (sous la condition que λ ne coupe chaque ligne $x = \text{const.}$ qu'en un point). Ceci fait, la solution sera déterminée, au signe près, par des quadratures.

APPLICATION. — Cas où S est un plan. Trouver les fonctions Y de x et y qui sont telles que la correspondance ponctuelle plane

$$X = \frac{y^2}{x}, \quad Y = Y(x, y)$$

conserve les aires.

Trouver en particulier celle de ces fonctions qui s'annule, quel que soit x , pour $y = h$, où h est une constante donnée..... 38

PROBLÈME. n° 17. — On demande les surfaces intégrales de l'équation

$$xy^2p + x^2yq = z(x^2 + y^2);$$

déterminer la fonction arbitraire de façon que les caractéristiques forment une famille de lignes asymptotiques des surfaces intégrales, et trouver les trajectoires orthogonales des surfaces ainsi obtenues..... 41

PROBLÈME n° 18. — Soient Ox , Oy , Oz un système de trois axes rectangulaires. Par un point M d'une surface S on mène une droite D parallèle à la droite qui a pour équations $y = 0$, $z = x$ et l'on joint le point M au point T où le plan tangent en M rencontre l'axe Oz . On demande l'équation générale des surfaces S telle que l'angle que fait la droite D avec MT soit un angle droit.

Démontrer que les sections de ces surfaces par les plans passant par Oz sont des lignes droites. Expliquer géométriquement ce résultat.

Former l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de ces génératrices rectilignes, en prenant pour variables x et $\frac{y}{x} = v$. Déterminer la fonction arbitraire dont dépendent les surfaces S de façon que l'une de ces trajectoires soit une courbe plane située dans un plan parallèle au plan des yz , et trouver les lignes asymptotiques de la surface S ainsi obtenue..... 44

PROBLÈME n° 19. — I. Soient, dans un plan, deux axes rectangulaires Ox , Oy . On donne une fonction $u(x, y)$ (définie et continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur d'une courbe fermée sans point double Γ).

Soit C une courbe fermée sans point double quelconque intérieure à Γ ; un sens positif et une origine des arcs ayant été choisis sur C , on désigne par s l'abscisse curviligne d'un point $P(x, y)$ du contour C , par V l'angle de la demi-tangente positive en P et de la demi-droite PU dont l'angle avec Ox est $u(x, y)$:

1° Transformer l'intégrale curviligne $I = \int_C \cos V ds$ en une intégrale double étendue à l'intérieur du contour C (on précisera le sens de parcours adopté dans l'intégration le long du contour).

2° Comment faut-il choisir la fonction u pour que I soit nulle quel que soit C ? Que peut-on dire alors des lignes qui, en chacun de leurs points M , sont tangentes à la direction MU correspondant à ce point?

3° u étant définie par l'équation implicite

$$x \sin u - y \cos u = 1.$$

et C étant une courbe fermée sans point double quelconque, telle que les directions PU_1 , PU_2 correspondant à l'un quelconque de ses points soient réelles et distinctes, on appelle PU l'une des directions PU_1 , PU_2 et l'on suppose que les diverses positions de PU forment une suite continue lorsque P parcourt C . Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C \cos V ds.$$

II. Étant donné un cylindre de révolution indéfini et un point A de sa surface S, on considère toutes les hélices tracées sur S passant par A :

1° Démontrer que toutes les tangentes (D) de toutes les hélices peuvent être considérées comme les normales d'une même surface Σ ;

2° Déterminer les lignes de courbure de Σ et les rayons de courbure principaux en un point M de Σ ;

3° Soient C une courbe fermée sans point double dont tous les points sont extérieurs au cylindre donné, V l'angle de la tangente en C en un de ses points avec une droite (D) passant par P; on suppose que lorsque P décrit une fois d'une manière continue le contour C à partir d'une position initiale P_0 , (D) varie d'une manière continue (avec discontinuité éventuelle en P_0). Calculer

$$\int_C \cos V ds.$$

A. B. — Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre. Cependant il est recommandé de ne traiter la troisième partie de II qu'après avoir traité I en entier.....

46

PROBLÈME n° 20. — Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires. et D une droite du plan des xy parallèle à Ox , représentée par les équations

$$z = 0, \quad y = h.$$

D'un point quelconque M de l'espace, on abaisse la perpendiculaire MP sur D et la perpendiculaire MQ sur Oz . On demande l'équation générale des surfaces S, telles que le plan tangent en un point quelconque M de l'une d'elles soit parallèle à la droite PQ correspondante.

Démontrer qu'il existe une infinité de surfaces de cette espèce, dépendant de deux constantes arbitraires, qui sont des surfaces développables

Trouver la relation qui lie les coefficients angulaires du plan tangent à l'une de ces surfaces.

Peut-on choisir les constantes dont dépendent ces surfaces développables de façon que l'arête de rebroussement soit une hélice?.....

54

PROBLÈME n° 21. — Intégrer l'équation aux différentielles totales

$$xy dx + (z - x^2) dy - y dz = 0;$$

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace, trouver les courbes (C) qui coupent orthogonalement les surfaces intégrales (S) de cette équation.

Montrer qu'il existe une infinité de surfaces de révolution du second degré qui coupent orthogonalement les surfaces (S) en tous leurs points de rencontre.....

58

PROBLÈME n° 22. — 1° Les axes Ox, Oy, Oz étant supposés rectangulaires, on demande quelles sont les surfaces (S) telles que l'intégrale de surface

$$\iint_{\Sigma} \lambda(x, y, z) (x dy dz + y dz dx + z dx dy).$$

étendue à une portion quelconque (Σ) de l'une de ces surfaces, soit toujours nulle, quelle que soit la fonction $\lambda(x, y, z)$.

2° Inversement, trouver les expressions générales des fonctions $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$, telles que l'intégrale de surface

$$\int \int_{(\Sigma)} A \, dy \, dz + B \, dz \, dx + C \, dx \, dy,$$

étendue à une portion quelconque (Σ) d'une quelconque de ces surfaces (S), soit nulle.

3° Étant données une portion (Σ) sans point singulier d'une surface (S) satisfaisant à la condition précédente, et l'intégrale

$$I = \int \int_{(\Sigma)} f(x, y, z) \, dx \, dy,$$

étendue à un côté de (Σ), ou $f(x, y, z)$ est une fonction donnée, on demande de déterminer une autre fonction $\varphi(x, y, z)$ telle que l'intégrale de surface I soit égale à l'intégrale curviligne

$$\int_{(\Gamma)} \varphi(x, y, z) (x \, dy - y \, dx),$$

prise le long du contour Γ de (Σ) dans un sens convenable. Quelle est l'expression générale des fonctions $\varphi(x, y, z)$ satisfaisant à cette condition ?

4° Lorsque la fonction $f(x, y, z)$ ne dépend que de z , on peut aussi prendre pour φ une fonction de la seule variable z ; donner l'interprétation géométrique du résultat obtenu, en supposant $f = z$

61

PROBLÈME n° 23. — Les axes Ox, Oy, Oz étant rectangulaires, on considère la droite D représentée par les équations

$$x = az + u, \quad y = amz + v,$$

où u et v sont deux paramètres indépendants; a et m sont deux fonctions de ces paramètres (u, v). Lorsque u et v varient, cette droite D engendre une congruence G .

1° Les intersections avec le plan xOy des développables de G forment deux familles de courbes (C_1) et (C_2) dépendant chacune d'une constante arbitraire. Former l'équation différentielle

$$(E) \quad \mathfrak{F}\left(u, v, \frac{dv}{du}\right) = 0,$$

du second degré en $\frac{dv}{du}$, dont les courbes C_1 et C_2 constituent l'intégrale générale. Donner la relation (\mathcal{R}) qui doit lier a, m , et leurs dérivées pour que les courbes (C_1) et (C_2) passant par un point arbitraire (u, v) soient orthogonales.

2° m étant choisie égale à $\frac{v}{u}$, déterminer explicitement toutes les fonctions $a(u, v)$ satisfaisant à la relation (\mathcal{R}); a étant l'une de ces fonctions. déterminer les courbes (C_1), (C_2), les développables et la surface focale

de G. Montrer que G est alors formée des normales à une famille de surfaces (S) dont on précisera la nature géométrique.

3° La fonction $m(u, v)$ étant définie implicitement par l'équation

$$v - mu + f(m) = 0$$

[où $f(m)$ est une fonction donnée de m], l'équation différentielle (E) de 1° se décompose en deux équations :

$$(E_1) \quad dv - m du = 0.$$

$$(E_2) \quad A dv + B du = 0;$$

montrer que les courbes (C_1) intégrales de (E_1) sont des droites. $a(u, v)$ étant en outre choisie de manière à vérifier la relation (α) de 1° expliciter l'équation (E_2) et montrer qu'elle s'intègre par une seule quadrature. Préciser alors la nature géométrique des courbes (C_2) , des développables et de la surface focale de G. Montrer que G est une congruence de normales.

65

PROBLÈME n° 24. — Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad Pp + Qq = Rz^2 + Sz + T,$$

où P, Q, R, S, T ne dépendent que des variables x et y , démontrer que le rapport anharmonique u de quatre intégrales particulières quelconques de l'équation (1) vérifie l'équation

$$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Connaissant quatre intégrales particulières z_1, z_2, z_3, z_4 de l'équation (1), peut-on en déduire l'intégrale générale?.....

71

PROBLÈME n° 25. — 1° Étant donnée l'expression

$$(1) \quad P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

où P, Q, R sont trois fonctions connues de x, y, z , démontrer qu'il existe une infinité de fonctions $f(x, y)$ des deux variables x et y , telles que si l'on remplace dans l'expression (1) z par $f(x, y)$ et dz par df , on obtient une différentielle exacte. Expliquer comment on peut arriver à la condition à laquelle doit satisfaire $f(x, y)$ en appliquant la formule de Stokes à une courbe fermée située sur la surface S représentée par l'équation $z = f(x, y)$.

2° Si $f(x, y) = C$ est une solution du problème quelle que soit la constante C, toutes les autres solutions s'obtiennent par une quadrature.

3° Lorsque l'équation

$$(2) \quad P dx + Q dy + R dz = 0$$

est complètement intégrable, toutes les surfaces S se déterminent sans aucune intégration quand on connaît l'intégrale générale $F(x, y, z) = \text{const.}$ de l'équation (2).

4° Déterminer les surfaces S dans le cas particulier où l'on a

$$P = 2x(y^2 - z^2) - 6xyz, \quad Q = 2yz^2 + 3z(y^2 - x^2), \quad R = 0$$

et prouver que ces surfaces S sont engendrées par des courbes Γ qui coupent orthogonalement une famille de surfaces Σ dont on demande l'équation. (Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.) Indiquer une représentation paramétrique des courbes Γ 73

PROBLÈME n° 26. — Une famille de courbes (Γ) est représentée, dans un système d'axes rectangulaires, par les équations

$$x^2 + 2y^2 = \alpha z^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \beta z,$$

où α et β désignent deux constantes arbitraires. On demande :

1° de démontrer que ces courbes sont les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces (S), dépendant d'un paramètre arbitraire, et de trouver l'équation générale de ces surfaces;

2° de prouver que les sections des surfaces (S) par les plans passant par Oz sont des lignes de courbure de ces surfaces et de trouver la seconde famille de lignes de courbure..... 78

PROBLÈME n° 27. — On considère la famille de surfaces S représentées, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$x(x^2 + y^2 + z^2) + Cy^2 = 0,$$

où C désigne une constante arbitraire.

On demande l'équation générale des surfaces qui coupent orthogonalement en chacun de leurs points la surface S qui passe par ce point. Démontrer qu'il existe une famille de sphères S_1 , dépendant d'un paramètre, qui satisfait à cette condition. Il existe une autre famille de surfaces S_2 , formant avec les surfaces S et S_1 un système triple orthogonal. Trouver cette famille de surfaces S_2 83

PROBLÈME n° 28. — Ox, Oy, Oz étant des axes rectangulaires donnés, on propose de trouver une surface dont le plan tangent, en l'un quelconque M de ses points, fasse avec les plans MOx, MOy des angles égaux entre eux.

On montrera par des considérations géométriques, et l'on vérifiera ensuite par le calcul que :

a. le problème dépend de l'une ou de l'autre de deux équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, qui ne diffèrent que par le signe d'un certain radical;

b. pour chacune d'elles on peut indiquer immédiatement une intégrale première du système différentiel des caractéristiques (c'est-à-dire une solution de l'équation, dépendant d'un paramètre arbitraire), ce qui permet d'achever ensuite l'intégration.

Montrer que toute surface répondant à la question admet comme plan de symétrie, soit le plan $x + y = 0$, soit le plan $x - y = 0$.

En déterminer une qui passe par la droite $x = 0, z = h$ (h longueur donnée)..... 89

PROBLÈME n° 29. — Intégrer le système

$$(x - a)(px + qy - rz) = (z - c)(p - x),$$

$$(y - b)(px + qy - rz) = (z - c)(q - y)..... 99$$

- PROBLÈME n° 30.** — Former l'équation aux dérivées partielles admettant l'intégrale complète $y^2(x^2 - a) = (z + b)^2$ et intégrer cette équation..... 102
- PROBLÈME n° 31.** — Déterminer les surfaces telles que le segment mu de la normale compris entre la surface et le point d'intersection n avec un plan fixe P se projette sur ce plan P suivant un segment de longueur constante..... 103
- PROBLÈME n° 32.** — Soit n le point où la normale en m à une surface rencontre le plan des xy; trouver les surfaces telles que la droite On soit parallèle au plan tangent en m..... 104
- PROBLÈME n° 33.** — 1° Déterminer une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles
- (E)
$$z^2(p^2 + q^2 + 4) - 16 = 0.$$
- 2° Déterminer les surfaces intégrales de l'équation (E) qui passent par le cercle (C)
- (C)
$$z = 1, \quad 4(x^2 + y^2) - 3 = 0.$$
- 3° L'une des intégrales passant par (C) est une surface fermée du second degré. On demande sa surface totale..... 106
- PROBLÈME n° 34.** — On donne l'équation aux dérivées partielles
- $$z + p.x + q.y + \frac{p^2}{q^2} = 0 \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$
- Trouver la surface intégrale S passant dans le plan des xy par la parabole
- $$3x = y^2.$$
- Déterminer l'enveloppe C des caractéristiques formant S et calculer avec trois décimales exactes la longueur de C entre les cotes $z = 1$ et $z = 2$ 109
- PROBLÈME n° 35.** — Désignant par m la projection sur le plan des xy d'un point quelconque M d'une surface S. Déterminer S de telle sorte que la distance du point m au plan tangent en M soit égale à une constante a. On constatera que l'on peut déterminer a priori une intégrale complète. En déduire les équations des caractéristiques. Trouver la surface S qui passe par un cercle donné dont le plan est parallèle au plan des xy; cette surface est de révolution..... 112
- PROBLÈME n° 36.** — D'un point M d'une surface S on abaisse une perpendiculaire MP sur un axe fixe Oz, puis du point P une perpendiculaire PN sur la normale en M à la surface S. On demande de déterminer les surfaces S telles que la longueur MN soit égale à une longueur donnée a. Étudier en particulier les surfaces S qui sont des surfaces hélicoïdes ayant Oz pour axe..... 115
- PROBLÈME n° 37.** — On considère une famille de cercles, dépendant de deux paramètres u et v, définie en coordonnées cartésiennes rectangulaires par

L'équation

$$(E) \quad (x - u)^2 + (y - v)^2 = R^2.$$

où R est une fonction donnée de u et v ;

$$R = R(u, v).$$

1° Les cercles dont l'équation s'obtient en remplaçant dans (E) v par une fonction déterminée de u , $v = f(u)$, ont une enveloppe. Former l'équation de la droite D joignant les points caractéristiques d'un de ces cercles $C(u_0, v_0)$, correspondant aux valeurs u_0 et $v_0 = f(u_0)$.

2° u_0 et v_0 restant fixes, on change la fonction $f(u)$ de toutes les manières possibles, $f(u_0)$ restant égal à v_0 . Montrer qu'alors la droite D passe par un point fixe M , indépendant de f ; calculer les coordonnées de M en fonction de u_0 et v_0 .

3° Comment choisir la fonction $R(u, v)$ pour que M soit le centre du cercle C , quels que soient u_0 et v_0 ?

4° Comment choisir $R(u, v)$ pour que M soit situé sur la circonférence du cercle C , quels que soient u_0 et v_0 ?

Intégrer l'équation aux dérivées partielles, trouver et démontrer que la famille (E) se compose alors de cercles tangents à une courbe fixe arbitraire ou passant par un point fixe arbitraire.....

119

PROBLÈME n° 38. — Les axes $Oxyz$ sont rectangulaires. On désigne par C un cercle variable du plan Oxy , dépendant de deux paramètres (x, y) , dont l'équation est $(X - x)^2 + (Y - y)^2 - z^2 = 0$, où $z = f(x, y)$ est une fonction déterminée de (x, y) ; (X, Y) sont les coordonnées courantes d'un point de C . A chaque point $m(x, y, z)$ de la surface S , d'équation $z = f(x, y)$, correspond ainsi un cercle C .

1° Lorsque m décrit sur S une courbe γ , définie par sa projection $y = g(x)$ sur xOy , le cercle C admet une enveloppe E_γ qu'il touche, en général, en deux points M et M' . Déterminer l'équation de MM' , et en donner une construction géométrique connaissant la tangente mt à γ en m . A chaque tangente mt de S correspondent ainsi deux points M, M' de C , et les tangentes $MT, M'T'$ à C en ces points.

2° En chaque point m de S on peut choisir mt (en général de deux façons différentes) de manière qu'elle soit orthogonale à MT ; les deux directions mt_1 et mt_2 possédant cette propriété pouvant être réelles et distinctes, ou confondues ou imaginaires. Caractériser par une propriété géométrique simple la région Σ de S où elles sont réelles et distinctes et la courbe Γ limitant cette région. Déterminer les surfaces S exceptionnelles pour lesquelles mt_1 et mt_2 sont toujours confondues.

3° S n'étant pas exceptionnelle, il existe sur elle deux familles de courbes (γ_1) et (γ_2) , telles que, pour chaque point m de Σ , il en passe une de la famille (γ_1) tangente à mt_1 , et une de la famille (γ_2) tangente à mt_2 . Équation différentielle des projections de ces courbes sur xOy . Dans quelle relation géométrique se trouvent une courbe (γ_1) et l'enveloppe E_γ , correspondante? Les courbes (γ_1) et (γ_2) présentent-elles sur Γ quelque particularité? Pour quelles surfaces S l'une des familles (γ_1) ou (γ_2) est-elle formée de courbes planes dans des plans parallèles à Oz ?

4° Déterminer S de façon que la projection sur xOy de la famille (γ) soit une famille donnée de courbes $g(x, y) = a$, dépendant du paramètre a . S est alors intégrale d'une équation linéaire aux dérivées partielles qui s'intègre par une seule quadrature. Expliquer ce résultat par des considérations géométriques. Effectuer complètement l'intégration dans le cas où la famille donnée est composée de cercles concentriques $x^2 + y^2 = a^2$.. 122

PROBLÈME n° 39. — Soient Ox , Oy , Oz trois axes de coordonnées rectangulaires. Une famille de surfaces, se déduisant de l'une d'elles par une translation parallèlement à l'axe Oz , est représentée par une équation

$$(1) \quad z + f(x, y) = C,$$

où C désigne une constante arbitraire.

1° On demande à quelle condition doit satisfaire la fonction $f(x, y)$ pour que les trajectoires orthogonales (Γ) des surfaces de cette famille soient des courbes planes situées dans des plans parallèles à l'axe Oy . (On pourra obtenir cette condition en exprimant que ces courbes se projettent sur le plan xOz suivant des lignes droites.)

2° Nous appellerons surfaces (S) les surfaces représentées par l'équation (1), où la fonction $f(x, y)$ satisfait à la condition précédente. Démontrer que ces surfaces possèdent la propriété suivante : si en un point quelconque M de l'une d'elles on mène la normale MN à cette surface, et la parallèle Mz' à l'axe Oz , l'angle de ces deux droites dépend uniquement de la distance du point M au plan xOz , lorsque le point M décrit la surface (S) . En déduire les équations générales de ces surfaces.

3° La fonction $f(x, y)$ satisfaisant à la condition précédente, les trajectoires orthogonales (Γ) des surfaces (S) s'obtiennent, en général, sans aucune intégration. Y a-t-il un cas exceptionnel ?

4° Trouver les surfaces (S) qui se déduisent par une translation parallèlement à Oz d'une surface de révolution autour de Ox , et leurs trajectoires orthogonales.

5° Les courbes (Γ) peuvent-elles être des lignes droites ? Quelle est alors la nature des surfaces (S) ?..... 127

PROBLÈME n° 40. — Les axes Ox , Oy , Oz étant rectangulaires, on considère la sphère σ définie par l'équation

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + Z^2 - 2zZ = 0,$$

où x, y, z désignent les coordonnées du centre de la sphère et X, Y, Z les coordonnées courantes.

1° Lorsque M décrit une courbe gauche C , la sphère σ a pour enveloppe une surface Σ .

a. Déterminer le cercle caractéristique γ de la sphère σ et en donner une construction géométrique connaissant M et la tangente en M à la courbe C .

b. Le cylindre c projetant C sur xOy étant fixé arbitrairement, déterminer C sur ce cylindre de manière que le cercle caractéristique γ ait, quel que soit M sur C , un rayon constant égal à un; que devient alors C lorsqu'on développe le cylindre c sur un plan ?

2° Lorsque M décrit une surface S d'équation cartésienne $z = f(x, y)$, la sphère σ a pour enveloppe une surface Σ ; définir géométriquement les deux points caractéristiques de la sphère σ , connaissant M et le plan tangent à S en M; déterminer $f(x, y)$ de manière que la distance de ces deux points caractéristiques reste constamment égale à 2, quel que soit M sur S, et intégrer l'équation aux dérivées partielles à laquelle on est ainsi conduit..... 132

PROBLÈME n° 41. — Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires O*x*, O*y*, O*z*, et une surface S, soient *m* la projection d'un point M de cette surface sur le plan des *xy*, D l'intersection du plan tangent en M à la surface S par le même plan $z = 0$, *d* la distance du point *m* à la droite D.

1° On demande de déterminer les surfaces S telles que la distance *d* soit constante et égale à une longueur donnée *l*;

2° Démontrer que les caractéristiques sont des lignes de courbure des surfaces intégrales, et trouver la seconde famille de lignes de courbure. Indiquer un mode de génération de ces surfaces:

3° Déterminer les surfaces de cette espèce passant par l'une des courbes C et C', représentées respectivement par les équations

$$C \begin{cases} y = 0, \\ z = e^{mx}, \end{cases} \quad C' \begin{cases} y = 0, \\ z = e^{mx^2}, \end{cases}$$

où *m* est une constante donnée..... 135

PROBLÈME n° 42. — Les axes O*x*, O*y*, O*z* étant supposés rectangulaires, soient P(*x*, *y*, *z*), Q(*x*, *y*, *z*), R(*x*, *y*, *z*) trois fonctions données des variables *x*, *y*, *z*, et S une surface représentée par une équation

$$(E) \quad z = f(x, y).$$

1° On demande de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces S telles que l'aire d'une portion quelconque Σ de S, limitée par un seul contour fermé Γ , soit égale à l'intégrale curviligne

$$\int P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

prise le long de Γ dans un sens convenable, et de former l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction $f(x, y)$:

2° Intégrer cette équation dans le cas particulier où l'on a

$$P = xz, \quad Q = yz, \quad R = 0;$$

3° Démontrer que, dans ce cas particulier, il existe une infinité de surfaces S, dépendant de deux paramètres arbitraires, qui sont des surfaces développables, et indiquer la nature de l'arête de rebroussement de ces surfaces..... 140

PROBLÈME n° 43. — On donne l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad z^2 pq - xy = a \quad \text{ou} \quad F(x, y, z, p, q) = a,$$

x et y sont les variables indépendantes, z est la fonction inconnue. On a posé $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, a est indépendant des variables précédentes.

1° La détermination des fonctions $G(x, y, z, p, q)$ telles que, pour toute valeur constante de b , l'équation

$$(2) \quad G = b$$

jointe à (1) donne une équation intégrable

$$(3) \quad dz = p dx + q dy,$$

équivalent à l'intégration d'un système d'équations différentielles (4) que l'on écrira.

Montrer que G admet les trois valeurs suivantes :

$$p^2 z^2 - y^2, \quad q^2 z^2 - x^2, \quad p x z - q y z.$$

Pour chacune de ces déterminations de G , déduire des équations (1), (2) et (3) une intégrale complète

$$(5) \quad V(x, y, z, a, b, c) = 0$$

de l'équation (1), où b et c sont des constantes arbitraires.

2° Mettre en évidence les combinaisons des équations (4) qui donnent chacune des solutions indiquées pour G .

3° Chercher la surface intégrale de (1) passant par la courbe

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$$

(α et β indépendants de x et y).

On étudiera d'abord le cas particulier $a = 0$.

4° Déduire de la relation (5) l'intégrale complète de l'équation (2) où b a une valeur indépendante de x, y, z, p, q .

De quelle équation

$$(6) \quad H(x, y, z, p, q) = c$$

la relation (5) donne-t-elle une intégrale complète quand on y fait varier a et b , laissant c fixe?..... 144

PROBLÈME n° 44. — On demande de déterminer les surfaces qui coupent sous un angle donné tous les plans passant par une droite fixe. Montrer que les caractéristiques sont des lignes de courbure des surfaces intégrales... 150

PROBLÈME n° 45. — On considère une sphère C , dont l'équation par rapport à un trièdre trirectangle $Oxyz$ est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(ax + by + cz) - 1 = 0.$$

Le centre M de C décrit une surface S ; on désignera par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à S au point M . L'enveloppe Σ de C est formée de deux nappes.

1° Comment obtient-on les points de contact P et P' de C avec Σ ?

Lorsque M décrit une courbe g sur S , P décrit sur Σ une courbe γ . Montrer que la tangente à γ est déterminée par la tangente à g . Calculer l'angle de ces deux tangentes connaissant les arcs élémentaires ds et ds' de g et γ ainsi que $\overline{OP} = \rho$. Quelles sont les courbes g pour lesquelles ces deux tangentes sont constamment rectangulaires ?

2° Équation aux dérivées partielles (E) des surfaces S pour lesquelles le triangle PMP' a une forme invariable. Déterminer une intégrale complète de cette équation qui soit une surface de révolution autour d'un axe arbitraire issu de O . Que peut-on dire de l'intégrale générale et des caractéristiques de l'équation (E) ? 155

PROBLÈME n° 46. — Intégrer l'équation

$$(1) \quad \frac{p^2}{x^2} + \frac{q^2}{y^2} - \frac{z}{z^2} = 0,$$

où x et y sont les variables indépendantes, z une fonction inconnue de x et de y .

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Montrer que toute surface intégrale S contient une ligne caractéristique L située sur une sphère ayant son centre à l'origine.

1° Trouver la surface intégrale S_0 passant par la droite

$$y = 0, \quad x = z + 1.$$

2° Calculer avec une erreur relative inférieure à 0,01 la longueur de la ligne L située sur S_0 163

PROBLÈME n° 47. — On demande la forme générale des fonctions $F(x, y, z, p, q)$ telles que les équations différentielles des caractéristiques de l'équation $F = 0$ admettent la combinaison intégrable $d\left(\frac{q}{p}\right) = 0$.

APPLICATION. — Déterminer les surfaces S telles que la distance d'un point quelconque M de l'une d'elles au plan des xy soit égale à la distance du point O au plan tangent à cette surface au point M 169

PROBLÈME n° 48. — Démontrer que l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad (z - px - qy)^2 = q\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

admet une intégrale complète formée de cônes ayant leurs sommets sur l'axe Oz , et trouver cette intégrale.

1° Quelle est la forme générale des équations du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

dont les développables caractéristiques sont des cônes ayant leurs sommets sur Oz ?

2° Trouver une intégrale de l'équation (E) passant par la parabole

$$y = 1, \quad z + (x-1)^2 = 0..... 174$$

PROBLÈME n° 49. — Étant donné un système de trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz , à un point quelconque M de coordonnées (x, y, z) de l'espace on fait correspondre le plan P représenté par l'équation

$$x(X - x) + y(Y - y) + e^{\lambda(x, y)}(Z - z) = 0,$$

x, y, z désignant les coordonnées courantes et $\lambda(x, y)$ étant une fonction des deux variables x, y indépendante de z . Soit Γ une courbe gauche telle que le plan osculateur en un quelconque de ses points coïncide avec le plan P correspondant à ce point.

1° La fonction $\lambda(x, y)$ étant donnée, démontrer qu'il existe en général deux familles de courbes Γ , de telle sorte qu'il passe une courbe de chaque famille, et une seule, par un point quelconque de l'espace. Former l'équation différentielle qui détermine les projections de ces courbes sur le plan xOy .

2° Existe-t-il des surfaces dont toutes les lignes asymptotiques sont des courbes Γ et quelle est la nature de ces surfaces ?

3° Déterminer les fonctions $\lambda(x, y)$ pour lesquelles les deux familles de courbes Γ sont confondues.

4° Trouver l'expression générale des fonctions $\lambda(x, y)$ de façon que les courbes Γ correspondantes se projettent sur le plan des xy suivant deux familles de courbes orthogonales. Inversement, étant données dans le plan xOy deux familles de courbes orthogonales, sont-elles toujours les projections de deux familles de courbes Γ correspondant à une fonction $\lambda(x, y)$?

EXEMPLE. — Déterminer la fonction $\lambda(x, y)$ telle que les courbes Γ se projettent sur le plan xOy suivant les paraboles $y^2 = 2Cx$ (où C est une constante arbitraire) et leurs trajectoires orthogonales. 179

PROBLÈME n° 50. — Soit S la surface enveloppe des sphères Σ représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = R^2,$$

où α et β sont deux paramètres variables, R une fonction positive $f(\alpha, \beta)$ de ces deux paramètres :

1° En un point M où la sphère Σ correspondant aux valeurs (α, β) des paramètres touche la surface enveloppe S , on mène la normale qui rencontre les plans de coordonnées xOy , yOz , zOx aux points A, B, C respectivement. On demande d'exprimer les segments \overline{AB} , \overline{AC} au moyen de $\alpha, \beta, \frac{\partial R}{\partial \alpha}, \frac{\partial R}{\partial \beta}$, ces segments étant comptés en adoptant comme direction positive celle qui va du point A au point M sur la normale.

2° Démontrer que l'on peut toujours déterminer par une quadrature toutes les surfaces S telles qu'il existe entre les segments \overline{AB} , \overline{AC} et R une relation donnée de forme arbitraire

$$F(R, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0.$$

3° On demande à quelle condition doivent satisfaire les deux fonctions $\varphi(R)$ et $\psi(R)$ pour qu'il existe une surface S telle que les segments \overline{AB}

et AC vérifient les deux relations

$$\overline{AB} = \varphi(R), \quad \overline{AC} = \psi(R),$$

† Déterminer en particulier les surfaces S pour lesquelles on a

$$\overline{AC} = R + a, \quad \overline{AB} = m(R + a),$$

a et m étant des constantes données, et indiquer une intégration géométrique de ces surfaces.....

189

PROBLÈME n° 51. — On considère les droites D dont les équations par rapport au trièdre trirectangle Oxy sont

$$\begin{aligned} x - az &= \lambda b, \\ y - bz &= -\lambda a, \end{aligned}$$

a, b, λ étant trois paramètres.

1° Former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(E) \quad F(x, y, z, p, q) = 0 \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

pour laquelle les tangentes en M(x, y, z) aux courbes caractéristiques issus de M sont toutes les droites D passant par M, quel que soit d'ailleurs le point M.

2° Effectuer dans (E) le changement de variables indépendantes

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

en conservant l'inconnue z. Expliquer géométriquement pourquoi la variable θ ne figure pas explicitement dans la nouvelle équation (E'). On pourra poser

$$P = \frac{\partial z}{\partial r}, \quad Q = \frac{\partial z}{\partial \theta}.$$

3° Intégrer l'équation (E') ou (E) : en donner une intégrale complète; déterminer ses caractéristiques.

† Déterminer celles de ces caractéristiques dont l'arc peut s'exprimer par une intégrale de fraction rationnelle.....

193

PROBLÈME n° 52. — Soient Ox, Oy, Oz un système de trois axes rectangulaires. En un point M d'une surface S, on mène le plan tangent qui coupe le plan xOy suivant une droite D. On désignera par δ la distance de l'origine à cette droite D, et par ρ la distance du point M à l'axe Oz,

1° Les surfaces S pour lesquelles la distance δ est égale à une fonction donnée de ρ , $\delta = \varphi(\rho)$ sont déterminées par une équation aux dérivées partielles du premier ordre. On demande de montrer que l'on peut obtenir une intégrale complète de cette équation par une quadrature, quelle que soit la fonction $\varphi(\rho)$.

2° Achever l'intégration dans le cas particulier où $\varphi(\rho) = \rho$, et trouver les surfaces S qui passent par la courbe (Γ) représentée par les deux

| <i>équations</i> | Pages. |
|--|--------|
| (F) $x = x', \quad z = x''',$ | |
| <i>m</i> étant une constante donnée. | |
| 3 ^o Trouver [dans le cas particulier où $\varphi(\rho) = \rho$] les équations générales des courbes caractéristiques, et montrer qu'il en existe une infinité situées sur des cônes de révolution ayant l'origine pour sommet. Quelles sont les surfaces intégrales dont toutes les caractéristiques possèdent cette propriété?..... | 197 |
| PROBLÈME n^o 53. — Soit $\theta(x, y, z)$ une intégrale de l'équation | |
| (E) $\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 = 1;$ | |
| démontrer que l'équation $\theta(x, y, z) = C$ représente, en coordonnées rectangulaires, une famille des surfaces parallèles..... | 204 |
| PROBLÈME n^o 54. — Les courbes intégrales de l'équation aux dérivées partielles qui admet l'intégrale complète | |
| $(1 - a^2)x + k(1 + a^2)z + 3ay + b = 0,$ | |
| où <i>a</i> et <i>b</i> sont deux constantes arbitraires, satisfont à la relation | |
| $dx^2 + dy^2 = k^2 dz^2$ | |
| | 207 |
| PROBLÈME n^o 55. — Toute courbe intégrale d'une équation aux dérivées partielles $F(x, y, z; p, q) = 0$ a un contact du second ordre avec toute surface intégrale de la même équation à laquelle elle est tangente..... | |
| | 209 |