

# TABLE DES MATIÈRES

Introduction .....	9
--------------------	---

## I. Les fondements de la géométrie projective

§	1. Définition des éléments à l'infini .....	27
§	2. Les formes élémentaires de la géométrie projective .....	31
§	3. Opérations projectives fondamentales .....	31
§	4. Les axiomes d'ordre de la géométrie projective .....	34
§	5. Rapport simple et rapport anharmonique .....	38
§	6. Correspondances projectives des droites .....	43
§	7. Le quadrangle complet .....	47
§	8. Figures planes perspectives .....	49
§	9. Quadruples harmoniques .....	54
§	10. L'axiome de continuité de DEDEKIND .....	59

## II. Géométrie projective de la droite

§	11. Systèmes de points harmoniques .....	65
	Coordonnées projectives sur la droite .....	70
§	12. Théorème fondamental des correspondances projectives ...	71
§	13. Correspondances projectives de la droite sur elle-même ...	73
§	14. Involutions .....	76
§	15. Correspondances hyperboliques et paraboliques de la droite	81
§	16. Représentation des correspondances projectives par produit d'involutions .....	85
§	17. Correspondances permutablees .....	86
§	18. Les groupes elliptiques monomiaux de la droite .....	92
§	19. Équivalence des correspondances .....	96
§	20. Affinités de la droite .....	99
§	21. Représentation analytique des correspondances projectives de la droite .....	101
	Opérations fondamentales sur les points de la droite .	105
§	22. Transformations linéaires .....	106
§	23. Définition du rapport anharmonique par coordonnées projectives .....	108
§	24. Coordonnées homogènes .....	110

## III. Géométrie projective du plan

§	25. Structure du plan projectif .....	112
§	26. Correspondances projectives du plan .....	121
§	27. Correspondances projectives du plan sur lui-même .....	128
§	28. Théorème du point fixe du plan projectif .....	130
§	29. Éléments invariants associés .....	133

30.	Classification des correspondances projectives du plan	135
31.	Collinéations permutableables avec une involution elliptique	140
32.	Affinités du plan	142
33.	Similitudes du plan	144
34.	Réciprocités du plan	145
35.	Polarités du plan	150
36.	Classification des polarités du plan	154
37.	Collinéations permutableables avec les polarités elliptiques du plan	157
38.	Collinéations permutableables avec une polarité hyperbolique du plan	159
39.	Sur les correspondances projectives de la gerbe	162
40.	Coordonnées homogènes dans le plan	163
41.	Transformations linéaires des coordonnées dans le plan	169
42.	Représentation analytique des collinéations du plan	173
43.	Représentation analytique des correspondances corrélatives et polaires du plan	177

#### IV. Géométrie projective de l'espace

44.	Structure de l'espace projectif	180
45.	Correspondances projectives de l'espace	184
46.	Les perspectives de l'espace	190
47.	Collinéations axiales de l'espace	193
48.	Collinéations biaxiales de l'espace	198
49.	Collinéations involutives de l'espace	204
50.	Collinéations de l'espace possédant un nombre fini d'éléments invariants	205
51.	Collinéations de l'espace permutableables avec une polarité elliptique d'un plan invariant	208
52.	Affinités et similitudes de l'espace	210
53.	Réciprocités de l'espace	212
54.	Polarités de l'espace	214
55.	Classification des polarités de l'espace	217
56.	Coordonnées homogènes dans l'espace	225
57.	Transformations linéaires des coordonnées homogènes dans l'espace	229

#### V. Coniques

58.	Propriétés projectives du cercle	235
59.	Définition des coniques	237
60.	Propriétés projectives des coniques	242
61.	Théorème de PASCAL	246
62.	Théorème de DESARGUES	249
63.	Faisceaux de coniques	251
64.	Correspondances projectives des coniques	256
65.	Correspondances projectives des coniques sur elles-mêmes	258
66.	Quadruples de points harmoniques et coordonnées projectives sur la conique	268
67.	Coniques dans le plan affine et dans le plan euclidien	271
	Cercle	273
	Ellipse, hyperbole et parabole	274
68.	Représentation analytique des coniques par des coordonnées homogènes	277
69.	Représentation analytique des coniques par des coordonnées parallèles	282

## VI. Quadriques

	70. Cônes du second ordre .....	285
	71. Cônes et cylindres dans les espaces affine et euclidien.....	288
	72. Définition des quadriques .....	290
	73. Construction projective des quadriques .....	292
	74. Quadriques réglées .....	300
	75. Quadriques réglées dans les espaces affine et euclidien ...	307
	76. Sur la structure des quadriques réglées .....	311
	77. Correspondances projectives des quadriques réglées .....	313
	78. Quadriques elliptiques .....	316
	79. Quadriques elliptiques dans l'espace affine et euclidien....	321
	80. Correspondances projectives des quadriques elliptiques.....	323
	81. Caractérisation des correspondances projectives des quadri- ques elliptiques .....	326
	Projection stéréographique .....	326
	Théorème de DARBOUX .....	328
§	82. Symétries d'une quadrique elliptique (anti-involutions).....	330
§	83. Correspondances homographiques d'une quadrique elliptique	331
	Homographies elliptiques et involutions .....	332
	Homographies hyperboliques .....	334
	Homographies loxodromiques .....	335
	Homographies paraboliques .....	335
§	84. Sur les sous-groupes du groupe homographique .....	338
§	85. Représentation des homographies par des involutions et des anti-involutions .....	340
§	86. Sections planes des quadriques elliptiques .....	344
§	87. Théorème du point fixe des correspondances homographiques	346
§	88. Représentation analytique des cônes du second ordre.....	348
§	89. Représentation analytique des quadriques au moyen des coordonnées homogènes .....	350
§	90. Représentation analytique des quadriques au moyen des coordonnées parallèles .....	354
§	91. Représentation analytique des homographies .....	356
	Transformations linéaires à coefficients réels .....	364
	Les rotations de la sphère .....	365
	Représentation analytique des anti-involutions .....	368

## VII. Mesure projective

§	92. Groupe des correspondances congruentes du plan euclidien	370
§	93. Groupes des congruences du plan projectif .....	373
	Mesure elliptique .....	373
	Mesure hyperbolique .....	375
	Mesure parabolique.....	379
§	94. Géométrie plane elliptique .....	382
	Théorèmes de congruence .....	382
	Modèle sphérique de la géométrie plane elliptique.....	386
§	95. Géométrie plane hyperbolique .....	387
	Lignes remarquables du plan hyperbolique .....	387
	Modèle de POINCARÉ de la géométrie plane hyperbolique	389
	Image des géométries euclidiennes et non-euclidiennes sur les quadriques elliptiques .....	391
§	96. Mesure d'angle et de distance euclidienne .....	392
	Distance de deux points .....	392
	Longueur de l'arc et mesure absolue de l'angle.....	393
	Fonctions trigonométriques et hyperboliques .....	394
	Sur la géométrie analytique du plan et de l'espace euclidien .....	396

§ 97.	Expression analytique de la mesure projective .....	399
	Mesure hyperbolique de la distance .....	399
	Mesure projective de l'angle .....	402
	Mesure elliptique de la distance .....	405
	Relation entre la géométrie elliptique et la géométrie sphérique.....	406
	Trigonométrie elliptique.....	408
	Angle de parallélisme de la géométrie hyperbolique ...	411
§ 98.	Géométrie projective complexe .....	413
	Droite projective complexe.....	413
	Plan projectif complexe .....	417
	Mesure de l'angle de LAGUERRE .....	421
§ 99.	Coordonnée complexe dans le plan hyperbolique .....	424
§ 100.	Mesure projective dans l'espace .....	431
§ 101.	Géométrie elliptique de l'espace .....	433
§ 102.	Géométrie hyperbolique de l'espace .....	440

### VIII. Sur les axiomes de la géométrie projective

§ 103.	Axiomes d'incidence de la géométrie projective .....	444
	Système d'axiomes de BIEBERBACH .....	445
	Indépendance du système d'axiomes .....	448
	Géométrie projective finie.....	450
§ 104.	Groupe élargi des axiomes d'incidence .....	452
	Système d'axiomes de VEULEN .....	452
	Géométrie projective de l'espace à $n$ dimensions.....	458
	Axiomes de FANO .....	459
§ 105.	Théorème de DESARGUES .....	459
	Le théorème de DESARGUES et la géométrie plane....	459
	Le théorème de DESARGUES et la géométrie de l'espace	464
	Théorème de HILBERT .....	467
§ 106.	Corps de la géométrie projective .....	467
	Addition et multiplication des points .....	467
	La commutativité de la multiplication et le théorème de PAPPUS .....	471
	Corps algébrique .....	472
	Géométrie projective de l'espace sur un corps donné...	474
§ 107.	Théorème de PAPPUS .....	480
	Représentation des correspondances projectives des droites par des perspectives .....	480
	Théorèmes équivalents au théorème de PAPPUS .....	484
	Théorèmes de PAPPUS et de DESARGUES .....	486
§ 108.	Axiome d'ARCHIMÈDE.....	491
	Théorème fondamental des correspondances projectives de la droite .....	491
	Théorème de LÜROTH—ZEUTHEN .....	494
	Corps ordonné .....	497
	Exemple de corps non archimédéen.....	497
§ 109.	Groupes et espaces topologiques .....	498
	Espaces topologiques .....	498
	Groupes topologiques .....	504
§ 110.	Systèmes de nombres hypercomplexes .....	506
§ 111.	Les fondements de la géométrie projective réelle et complexe	510
	Bibliographie .....	519
	Index .....	521