

# Inhalt.

## Erstes Kapitel.

### Das Koordinatensystem. Ebene und Gerade.

	Seite
1. Der Begriff des Vektors . . . . .	1
2. Projektion eines Vektors auf eine gerichtete Gerade . . . . .	1
3. Projektion eines geschlossenen Linienzugs auf eine gerichtete Gerade . . . . .	2
4. Projektion eines Vektors auf eine Ebene . . . . .	3
5. Projektion eines Dreiecks auf eine Ebene . . . . .	3
6. Vorzeichen des Dreiecksinhalts . . . . .	4
7. Das rechtwinklige Koordinatensystem . . . . .	5
8. Das schiefwinklige Koordinatensystem . . . . .	6
9. Abstand eines Punktes vom Ursprung. Kugelgleichung. . . . .	6
10. Festlegung eines Punktes durch seinen Radiusvektor und dessen Richtungskosinus . . . . .	7
11. Entfernung zweier Punkte. Gleichung einer Kugel in beliebiger Lage. Gleichungen der geraden Linie. . . . .	8
12. Winkel zweier Richtungen . . . . .	9
13. Richtungskosinus der Normalen zu zwei gegebenen Strahlen . . . . .	10
14. Normalform der Gleichung einer Ebene . . . . .	10
15. Teilverhältnis eines Punktes in bezug auf zwei Grundpunkte . . . . .	13
16. Ebene durch drei Punkte . . . . .	13
17. Eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ zwischen den Koordinaten $x, y, z$ stellt eine Fläche dar . . . . .	15
18. Zwei Gleichungen $f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0$ stellen eine Raumkurve dar . . . . .	16
19. Drei Gleichungen $f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0, f_3(x, y, z) = 0$ stellen im allgemeinen einzelne Punkte dar . . . . .	18
20. Bedingung dafür, daß zwei Raumkurven sich schneiden . . . . .	18
21. Ordnung einer algebraischen Fläche. Tangentialebene. Unendlich ferne Elemente. Homogene Punktkoordinaten . . . . .	18
22. Ordnung einer Raumkurve . . . . .	24
23. Winkel zweier Ebenen. Aufeinander senkrecht stehende und parallele Ebenen . . . . .	24
24. Ebene bestimmt durch die Achsenabschnitte . . . . .	25
25. Ebene durch drei Punkte . . . . .	25
26. Inhalt eines Dreiecks . . . . .	26
27. Abstand eines Punktes von einer Ebene . . . . .	28
28. Schnittpunkt von drei Ebenen. Vier Ebenen durch einen Punkt . . . . .	29
29. Tetraedervolumen . . . . .	30
30. Ebenenbüschel. Ebenenbündel . . . . .	36
31. Doppelverhältnis von vier Ebenen. Projektivität. Involution . . . . .	37

## Die gerade Linie.

	Seite
32. Gleichungsformen der geraden Linie . . . . .	42
33. Richtungskosinus einer Geraden aus der allgemeinen Gleichungsform . . . . .	44
34. Richtungskosinus der Halbirungslinie des von zwei gegebenen Geraden gebildeten Winkels . . . . .	46
35. Winkel zweier Geraden. Winkel zwischen Ebene und Gerade. . . . .	46
36. Bedingung dafür, daß eine Gerade in einer Ebene liegt . . . . .	48
37. Ebene durch eine Gerade senkrecht zu einer Ebene . . . . .	48
38. Das Parallelebenenpaar zu zwei windschiefen Geraden . . . . .	49
39. Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden . . . . .	50
40. Die sechs Koordinaten einer Geraden . . . . .	53

## Koordinatentransformation.

41. Parallelverschiebung des Koordinatensystems. Allgemeine Koordinatentransformation . . . . .	54
42. Drehung des Koordinatensystems . . . . .	55
43. Die Cayleyschen und Eulerschen Gleichungen . . . . .	59

## Zweites Kapitel.

### Plückersche Ebenenkoordinaten. Dualitätsprinzip. Der unendlich ferne Kugelkreis.

44. Plückersche Ebenenkoordinaten. . . . .	63
45. Das Dualitätsprinzip . . . . .	66
46. Deutung einer Gleichung in Ebenenkoordinaten . . . . .	69
47. Zwei Gleichungen in Ebenenkoordinaten stellen eine abwickelbare Fläche dar . . . . .	71
48. Homogene Ebenenkoordinaten . . . . .	73
49. Der unendlich ferne Kugelkreis . . . . .	76

## Drittes Kapitel.

### Erzeugung der Flächen. Übersicht über die verschiedenen Formen von Flächen zweiter Ordnung.

50. Flächenfamilien. . . . .	78
51. Zylinderflächen . . . . .	80
52. Kegelflächen . . . . .	82
53. Umdrehungsflächen . . . . .	85
54. Die Umdrehungsflächen zweiter Ordnung . . . . .	88
55. Die allgemeinen Flächen zweiter Ordnung. . . . .	90

## Viertes Kapitel.

### Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Quadratische Formen. Invarianten.

56. Gleichung der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung . . . . .	95
57. Schnitt einer Geraden mit der Fläche. Tangentialebene. Der Kegel zweiter Ordnung . . . . .	96
58. Polarebene. Polartetraeder . . . . .	99
59. Tangentenkegel. . . . .	103
60. Diametralebenen. Konjugierte Durchmesser . . . . .	103
61. Die Hauptebenen . . . . .	107

62. Parallelebenen schneiden die Fläche zweiter Ordnung nach ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten. . . . .	108
63. Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung in Ebenenkoordinaten. . . . .	108
64. Die Gleichungen des Kegels zweiter Ordnung in Ebenenkoordinaten. . . . .	110
65. Quadratische Formen . . . . .	115
66. Reduzible und irreduzible quadratische Formen . . . . .	117
67. Minimalzahl der Veränderlichen einer reduzierbaren quadratischen Form . . . . .	119
68. Kanonische Darstellung der quadratischen Formen . . . . .	121
69. Das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen . . . . .	124
70. Invarianten der quadratischen Formen . . . . .	124
71. Simultaninvarianten von zwei quadratischen Formen . . . . .	125
72. Orthogonale Invarianten . . . . .	126

### Fünftes Kapitel.

#### Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung.

73. Der Mittelpunkt wird zum Ursprung des Koordinatensystems gemacht. . . . .	130
74. Reduktion der Flächengleichung durch Beziehung auf die Hauptachsen als Koordinatenachsen. . . . .	131
75. Reduktion der Flächengleichung durch Drehung des Koordinatensystems	138

### Sechstes Kapitel.

#### Ableitung von Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung aus besonderen Formen ihrer Gleichungen.

76. Gleichung der Tangentialebene der Mittelpunktsflächen. . . . .	146
77. Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten. . . . .	147
78. Flächennormale. . . . .	148
79. Beziehung zwischen drei zueinander senkrechten Halbmessern. . . . .	148
80. Beziehung zwischen den Abständen des Mittelpunkts von drei zueinander senkrechten Tangentialebenen . . . . .	149
81. Diametralebene . . . . .	149
82. Die Summe der Quadrate von drei zueinander konjugierten Halbmessern ist konstant . . . . .	150
83. Das Parallelepipet, dessen Kanten drei konjugierte Halbmesser sind, hat ein konstantes Volumen . . . . .	150
84. Quadratsumme der Projektionen von drei konjugierten Halbmessern auf eine Gerade oder eine Ebene. . . . .	151
85. Ort des Schnittpunktes der Tangentenebenen in den Endpunkten von drei konjugierten Halbmessern . . . . .	151
86. Achsenlängen eines Diametralschnittes . . . . .	152
87. Ebener Schnitt mit einem gegebenen Durchmesser als Achse . . . . .	153
88. Die Kreisschnitte des Ellipsoids . . . . .	154
89. Die Kreispunkte des Ellipsoids. . . . .	155
90. Die Kreisschnitte der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung. Bündel von Flächen zweiter Ordnung. . . . .	155
91. Die Kreisschnitte und der unendlich ferne Kugelkreis . . . . .	164
92. Bedingungen für Rotationsflächen zweiter Ordnung. . . . .	166
93. Das einmantlige Hyperboloid und seine Erzeugenden. . . . .	167
94. Das einmantlige Hyperboloid ist durch drei Erzeugende derselben Schar bestimmt . . . . .	171

95. Das hyperbolische Paraboloid und seine Erzeugenden . . . . .	174
96. Die Kugel . . . . .	178
97. Geometrische Örter. Beispiele . . . . .	182

### Siebentes Kapitel.

#### Tetraederkoordinaten. Projektive Verwandtschaft. Linienkoordinaten.

98. Definition der Tetraederkoordinaten . . . . .	207
99. Gleichung der Ebene und des Punktes in Tetraederkoordinaten . . . . .	215
100. Metrische Beziehungen in Tetraederkoordinaten . . . . .	222
101. Die Kollineation und Korrelation im Raume . . . . .	231
102. Die allgemeinelineare Substitution. Allgemeinste Koordinatentransformation . . . . .	233
103. Kollineation für Cartesische Koordinaten. Perspektive Räume. Affinität . . . . .	238
104. Doppelemente der Kollineation. Involutionen . . . . .	255
105. Haupttetraeder der Korrelation. Das Nullsystem. Klassifikation der Korrelationen . . . . .	265
106. Die projektiven Koordinaten der Geraden . . . . .	284
107. Bedingung dafür, daß zwei Geraden sich schneiden . . . . .	289
108. Transformation der Linienkoordinaten . . . . .	290
109. Die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Linienkoordinaten . . . . .	291
110. Strahlenkomplexe. Strahlenkongruenzen. Regelflächen . . . . .	294

### Achtes Kapitel.

#### Verwandtschaft der Flächen zweiter Ordnung. Die Raumkurven dritter Ordnung.

111. Kollineare Flächen zweiter Ordnung . . . . .	303
112. Kollineare Transformation der Flächen zweiter Ordnung in sich . . . . .	305
113. Korrelative Flächen zweiter Ordnung . . . . .	319
114. Kugelreziprozität . . . . .	320
115. Die kugelreziproke Fläche einer Kugel ist eine Umdrehungsfläche . . . . .	320
116. Reziprokalkegel. Die Fokallinien des Kegels zweiter Ordnung . . . . .	323
117. Die Fläche zweiter Ordnung erzeugt durch zwei reziproke Bündel oder Felder . . . . .	325
118. Die Raumkurven dritter Ordnung (synthetisch) . . . . .	328
119. Analytische Darstellung der Raumkurve dritter Ordnung . . . . .	332
120. Kanonische Gleichungen der kubischen Raumkurve . . . . .	334

### Neuntes Kapitel.

#### Das Flächenbüschel zweiter Ordnung.

121. Das Flächenbüschel zweiter Ordnung . . . . .	342
122. Sätze über das Flächenbüschel und über die Flächenschar zweiter Ordnung . . . . .	346
123. Die vier Kegel und das gemeinsame Polartetraeder des Flächenbüschels . . . . .	348
124. Das Flächenbüschel $U + \lambda LM = 0$ . . . . .	353
125. Das Flächenbüschel $U + \lambda L^2 = 0$ . . . . .	359
126. Tetraeder, die in bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung zueinander konjugiert sind . . . . .	360
127. Sätze über Flächen zweiter Ordnung, die den Sätzen von <i>Pascal</i> und <i>Brianchon</i> entsprechen . . . . .	362