

## INHALTSVERZEICHNIS

### *Einleitung*

#### Wesen der Mathematik

1. Gegenstand der Mathematik . . . . .	13
2. Verhältnis der Mathematik zu anderen Wissenschaften . . . . .	14
3. Besonderheiten der mathematischen Darstellung . . . . .	15
4. Definitionen in der Mathematik . . . . .	15
5. Lernen und Verstehen . . . . .	17

### *Kapitel I*

#### Grundbegriffe

##### **§ 1. Die Grundeigenschaften reeller Zahlen**

6. Der Gegenstand der Analysis . . . . .	18
7. Zusammenstellung der Grundeigenschaften reeller Zahlen . . . . .	18
8. Gleichheitsbeziehungen . . . . .	20
9. Das Grundgesetz der natürlichen Zahlen (Vollständige Induktion) . . . . .	21
10. Körpereigenschaften reeller Zahlen . . . . .	22
11. Größeneigenschaften reeller Zahlen . . . . .	23
12. Das Archimedische und das Trennungsassiom . . . . .	24

##### **§ 2. Erste Folgerungen aus den Grundeigenschaften reeller Zahlen**

13. Anordnung und Vorzeichen . . . . .	26
14. Weiteres über Anordnung und Vorzeichen . . . . .	28

##### **§ 3. Weitere Folgerungen aus den Grundeigenschaften**

15. Das Rechnen mit Ungleichungen . . . . .	30
16. Systeme von linearen Ungleichungen mit zwei Unbekannten . . . . .	32
17. Die Bernoullische Ungleichung . . . . .	33
18. Die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel . . . . .	35
19. Absoluter Betrag . . . . .	37

##### **§ 4. Der Funktionsbegriff**

20. Der Wertevorrat einer Variablen . . . . .	40
21. Der allgemeine Funktionsbegriff . . . . .	42
22. Verschiedene Darstellungen und Klassen von Funktionen . . . . .	45
23. Einige Bezeichnungen. Differenzen. Operatoren . . . . .	47

*Kapitel II*

## Grenzwerte

**§ 5. Nullfolgen**

24. Definition einer Nullfolge . . . . .	53
25. Einige Eigenschaften von Nullfolgen . . . . .	55

**§ 6. Grenzwerte von Zahlenfolgen**

26. Definition des Grenzwerts . . . . .	57
27. Allgemeine Eigenschaften konvergenter Folgen . . . . .	60
28. Uneigentliche Konvergenz . . . . .	61
29. Rechnen mit Grenzwerten . . . . .	63

**§ 7. Spezielle Sätze über Konvergenz von Zahlenfolgen**

30. Konvergenz monotoner Zahlenfolgen . . . . .	66
31. Die Zahl $\varepsilon$ als $\text{Lim} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$ . . . . .	68
32. Bestimmung einiger Grenzwerte . . . . .	71

**§ 8. Unendliche Reihen**

33. Konvergente unendliche Reihen . . . . .	75
34. Elementare Eigenschaften unendlicher Reihen . . . . .	78
35. Einige Konvergenzkriterien . . . . .	82

**§ 9. Grenzwerte von Funktionen eines stetigen Arguments**

36. Konvergenz von $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ . . . . .	86
37. Konvergenz von $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$ . . . . .	89
38. Allgemeines zum Konvergenzbegriff. Äquivalenz . . . . .	93

*Kapitel III*

## Stetige Funktionen einer Variablen und bestimmte Integrale

**§ 10. Stetige Funktionen**

39. Definition der Stetigkeit . . . . .	98
40. Operationen mit stetigen Funktionen . . . . .	102
41. Gleichmäßige Stetigkeit . . . . .	104
42. Existenz des Maximums und Minimums. Zwischenwertsatz . . . . .	107

**§ 11. Trigonometrische Funktionen**

43. Winkelmessung in der Trigonometrie . . . . .	109
44. Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ . . . . .	112
45. Weitere Eigenschaften trigonometrischer Funktionen . . . . .	116

**§ 12. Definition des bestimmten Integrals**

46. Flächenbestimmung als Integrationsprozeß . . . . .	122
47. Allgemeiner Ansatz des Integrationsprozesses . . . . .	125
48. Konvergenzbeweis für die Näherungssummen des Integrals . . . . .	126
49. Beispiele für die direkte Berechnung des Integrals . . . . .	130

**§ 13. Elementare Eigenschaften des bestimmten Integrals**

50. Formale Eigenschaften des Integrals für $a < \beta$ . . . . .	133
51. Formale Eigenschaften des bestimmten Integrals für beliebige Grenzen . . . . .	136
52. Ungleichungen und erster Mittelwertsatz für bestimmte Integrale . . . . .	139
53. Der verallgemeinerte erste Mittelwertsatz . . . . .	142

*Kapitel IV*

Der Begriff der Ableitung und die Fundamentalsätze der Infinitesimalrechnung

**§ 14. Die Ableitung**

54. Der Begriff der Ableitung . . . . .	145
55. Beispiele. Einfachste Eigenschaften der Ableitung . . . . .	148

**§ 15. Der Zusammenhang zwischen der Ableitung und dem Differenzenquotienten einer Funktion**

56. Der Rollesche Satz . . . . .	151
57. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	154

**§ 16. Die Fundamentalsätze der Infinitesimalrechnung**

58. Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze . . . . .	157
59. Bestimmtes Integral und Stammfunktion . . . . .	160

*Kapitel V*

Die Technik des Differenzierens

**§ 17. Ableitungen rationaler Verbindungen gegebener Funktionen**

60. Elementare Differentiationsregeln . . . . .	165
61. Weitere Ausführungen zu den elementaren Differentiationsregeln . . . . .	167

**§ 18. Umkehrung monotoner Funktionen**

62. Existenz und Stetigkeit inverser Funktionen. Eigentlich monoton wachsende Funktionen . . . . .	170
63. Existenz, Stetigkeit und Ableitung inverser Funktionen. Beliebige eigentlich monotone Funktionen . . . . .	172
64. $x^r$ für rationale $r$ . . . . .	174
65. Umkehrung von Sinus und Cosinus . . . . .	177
66. Umkehrung von Tangens und Cotangens . . . . .	181
67. Allgemeines über Arcus-Funktionen . . . . .	184

### § 19. Die Kettenregel und ihre Anwendungen

68. Zusammengesetzte Funktionen einer Veränderlichen . . . . .	187
69. Partielle Ableitung und Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	191
70. Differentiation impliziter Funktionen . . . . .	195

## Kapitel VI

### Die Technik des Integrierens

#### § 20. Integralumformung durch partielle Integration und Variablensubstitution

71. Partielle Integration . . . . .	198
72. Substitution einer neuen Integrationsvariablen . . . . .	201
73. Beispiele zur Substitutionsmethode . . . . .	292

#### § 21. Logarithmus und Exponentialfunktion

74. Die $l$ -Funktion und die $e$ -Funktion . . . . .	208
75. Potenzen mit beliebigen Exponenten . . . . .	212
76. Einige allgemeine Ungleichungen . . . . .	214
77. Logarithmus und Exponentialfunktion . . . . .	218

#### § 22. Anwendungen der Logarithmus- und der Exponentialfunktion

78. Differential- und Integralformeln, die Logarithmus- und Exponentialfunktionen enthalten . . . . .	223
79. Integrationsbeispiele . . . . .	228
80. Anwendung der Exponentialfunktion auf das Gesetz des natürlichen Wachstums und Abnehmens . . . . .	231

#### § 23. Integration rationaler Funktionen

81. Integration von Partialbrüchen . . . . .	232
82. Ansatz der Partialbruchzerlegung . . . . .	236
83. Die Herstellung der Partialbruchzerlegung . . . . .	239
84. Der Beweis der Möglichkeit und Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung . . . . .	242

## Kapitel VII

### Erste Anwendungen der Differentialrechnung auf die Geometrie und die Funktionen-Diskussion

#### § 24. Anwendungen der ersten Ableitung. Monotonie

85. Monotonie schlechthin . . . . .	249
86. Eigentliche Monotonie. Beispiele . . . . .	251
87. Konvexität und Konkavität . . . . .	252
88. Uneigentliche und lokale Konvexität und Konkavität . . . . .	254

## § 25. Anwendungen der ersten Ableitung. Extrema. Unbestimmte Ausdrücke

89. Maxima und Minima . . . . .	255
90. Beispiele zur Untersuchung von Extrema . . . . .	258
91. Die Bernoulli-L'Hospitalische Regel . . . . .	259
92. Beispiele zur Bernoulli-L'Hospitalischen Regel . . . . .	262

## § 26. Die zweite Ableitung. Der Funktionsverlauf im Großen

93. Zweite und höhere Ableitungen . . . . .	266
94. Anwendungen der zweiten Ableitung . . . . .	269
95. Der Funktionsverlauf im Großen. Kurvendiskussion . . . . .	271

## § 27. Darstellung von Kurven in der Ebene und im Raum

96. Parameterdarstellung einer Kurve . . . . .	274
97. Beispiele für die Parameterdarstellung in der Ebene . . . . .	276
98. Die Schraubenlinie . . . . .	279
99. Tangente und Ableitung in Parameterdarstellung . . . . .	281
100. Allgemeine Kurvengleichungen. Normale und Normalebene . . . . .	284
101. Beispiele für Tangentenbestimmung . . . . .	286

## § 28. Bogenlänge

102. Bogenlänge bei glatten Kurvenbögen . . . . .	289
103. Bogenlänge als Parameter . . . . .	293
104. Beispiele für die Berechnung der Bogenlänge . . . . .	295
105. Bogenlänge in ebenen Polarkoordinaten . . . . .	296

## § 29. Entwicklung des Logarithmus und des Arcustangens

106. Entwicklung des Logarithmus . . . . .	299
107. Berechnung der Logarithmen . . . . .	301
108. Entwicklung der Arcustangens-Funktion . . . . .	304

## § 30. Die Taylorsche Formel

109. Die Taylorsche Formel mit dem Restglied . . . . .	306
110. Weitere Diskussion der Taylorschen Formel . . . . .	309
111. Die Maclaurinsche Spezialisierung . . . . .	311

## § 31. Entwicklungen von $e^x$ , $\sin x$ und $\cos x$

112. Anwendung der Taylorschen Formel . . . . .	314
113. Die Eulerschen Formeln . . . . .	318

<b>Register</b> . . . . .	321
---------------------------	-----