

## SOMMAIRE

### EXPOSE I : "PREFAISCEAUX, par A. Grothendieck et J.L. Verdier

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 0.    | Univers . . . . .   | 1   |
| 1.    | U-catégories. Préfaisceaux d'ensembles . . . . .  | 4   |
| 2.    | Limites projectives et inductives . . . . .   | 9   |
| 3.    | Propriétés d'exactitude de la catégorie des préfaisceaux . . . . .  | 18  |
| 4.    | Cribles . . . . .   | 20  |
| 5.    | Fonctorialité des catégories de préfaisceaux . . . . .  | 22  |
| 6.    | Foncteurs fidèles et foncteurs conservatifs . . . . .   | 38  |
| 7.    | Sous-catégories génératrices et cogénéatrices . . . . .   | 45  |
| 8.    | Ind-objets et pro-objets . . . . .  | 61  |
| 8.1.  | Foncteurs cofinaux et sous-catégories cofinales . . . . .   | 61  |
| 8.2.  | Ind-objets et foncteurs ind-représentables . . . . .  | 67  |
| 8.3.  | Caractérisation des foncteurs ind-représentables . . . . .  | 74  |
| 8.4.  | Ind-objets constants, essentiellement constants . . . . .   | 79  |
| 8.5.  | Limites inductives filtrantes dans $\text{Ind}(C)$ . . . . .  | 80  |
| 8.6.  | Extension d'un foncteur aux ind-objets . . . . .  | 83  |
| 8.7.  | Le foncteur $\varinjlim_C: \text{Ind}(C) \rightarrow C$ . Caractérisations universelles de la catégorie $\text{Ind}(C)$ . . . . . | 88  |
| 8.8.  | Représentation indicielle d'un foncteur $J \rightarrow \text{Ind}(C)$ . . . . .   | 100 |
| 8.9.  | Propriétés d'exactitude de $\text{Ind}(C)$ . . . . .  | 108 |
| 8.10. | Notions duales : proobjets, foncteurs pro-représentables . . . . .  | 119 |
| 8.11. | Ind-adjoints et pro-adjoints . . . . .  | 123 |
| 8.12. | Ind-objets et pro-objets stricts. Application à un critère de représentabilité . . . . .  | 127 |
| 8.13. | Foncteurs pro-représentables et foncteurs accessibles . . . . .   | 136 |
| 9.    | Foncteurs accessibles, filtrations cardinales et construction de petites sous-catégories génératrices . . . . .                   | 138 |
| 10.   | Glossaire . . . . .   | 179 |
|       | Appendice : Univers (par N. Bourbaki) . . . . .   | 185 |

### EXPOSE II : "TOPOLOGIES ET FAISCEAUX", par J.L. Verdier

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 1. | Topologies, Familles couvrantes, Prétologies . . . . .          | 219 |
| 2. | Faisceaux d'ensembles . . . . .                                 | 223 |
| 3. | Faisceau associé à un préfaisceau . . . . .                     | 228 |
| 4. | Propriétés d'exactitude de la catégorie des faisceaux . . . . . | 235 |

|  |     |
|--|-----|
| 5. Extension d'une topologie de $C$ à $C^\wedge$ . . . . . | 251 |
| 6. Faisceaux à valeurs dans une catégorie . . . . .        | 257 |

EXPOSE III : "FONCTORIALITE DES CATEGORIES DE FAISCEAUX", par J.L. Verdier

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 1. Foncteurs continus . . . . .   | 265 |
| 2. Foncteurs cocontinus . . . . . | 278 |
| 3. Topologie induite . . . . .    | 283 |
| 4. Lemme de comparaison . . . . . | 288 |
| 5. Localisation . . . . .         | 293 |

EXPOSE IV : "TOPOS", par A. Grothendieck et J.L. Verdier

|  |     |
|--|-----|
| 0. Introduction . . . . .  | 299 |
| 1. Définition et caractérisation des topos . . . . .   | 302 |
| 2. Exemples de topos . . . . .   | 311 |
| 2.1. Topos associé à un espace topologique . . . . .   | 311 |
| 2.2. Topos ponctuel ou final, et topos vide ou initial . . . . .   | 313 |
| 2.3. Topos associé à un espace à opérateurs . . . . .  | 314 |
| 2.4. Topos classifiant d'un Groupe . . . . .   | 315 |
| 2.5. "Gros site" et "Gros topos" d'un espace topologique.<br>Topos classifiant d'un groupe topologique . . . . . | 316 |
| 2.6. Topos de la forme $\hat{C}$ . . . . .   | 318 |
| 2.7. Topos classifiant d'un pro-groupe . . . . .   | 319 |
| 2.8. Exemple d'un faux topos. . . . .  | 322 |
| 3. Morphismes de topos. . . . .  | 323 |
| 4. Exemples de morphismes de topos . . . . .   | 332 |
| 4.1. Le topos $\text{Top}(X)$ pour un espace topologique $X$ variable . . . . .                                  | 333 |
| 4.2. Propriétés de fidélité de $X \mapsto \text{Top}(X)$ . . . . .   | 336 |
| 4.3. Morphismes dans le topos final : objets constants d'un<br>topos ; foncteurs sections . . . . .              | 339 |
| 4.4. Morphismes du "topos vide" . . . . .  | 342 |
| 4.5. Le topos classifiant $B_G$ pour $G$ groupe variable . . . . .   | 343 |
| 4.6. Le topos $\hat{C}$ pour $C$ catégorie variable . . . . .  | 346 |
| 4.7. Le topos $C^\sim$ pour un site $C$ variable (foncteurs cocontinus). . . . .                                 | 350 |
| 4.8. Le morphisme de topos $C^\sim \rightarrow \hat{C}$ pour un site $C$ . . . . .                               | 353 |
| 4.9. Effet d'un foncteur continu de sites. Morphismes de sites. . . . .  | 354 |
| 4.10. Relations entre le petit et le gros topos associés à un<br>espace topologique $X$ . . . . .                | 358 |
| 5. Topos induit . . . . .  | 365 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 6.   | Points d'un topos et foncteurs fibres . . . . .  | 384 |
| 7.   | Exemples de foncteurs fibres et de points de topos . . . . .   | 402 |
| 7.1. | Cas de $\text{Top}(X)$ pour un espace topologique $X$ . . . . .  | 402 |
| 7.2. | Points d'un topos classifiant $B_G$ . . . . .  | 407 |
| 7.3. | Points des topos $\hat{C}$ , exemples de $U$ -topos $\hat{C}$ dont la catégorie<br>des points ne soit pas équivalente à une petite catégorie . . . . . | 411 |
| 7.4. | Topos non vides sans points . . . . .  | 412 |
| 7.5. | Catégories Karoubiennes et morphismes de topos.(exercice) . . . . .  | 413 |
| 7.6. | Morphismes essentiels de topos, points essentiels (exercice) . . . . .   | 414 |
| 7.7. | Points inhabituels d'un topos classifiant (exercice) . . . . .   | 417 |
| 7.8. | Topologie sur $\text{Point}(E)$ , et topos associés aux ensembles<br>ordonnés (exercice) . . . . .   | 417 |
| 8.   | Localisation. Ouverts d'un topos . . . . .   | 420 |
| 9.   | Sous-topos et recollement de topos . . . . .   | 431 |
| 10.  | Faisceaux de morphismes . . . . .  | 491 |
| 11.  | Topos annelés, localisation dans les topos annelés . . . . .   | 496 |
| 12.  | Opérations sur les modules . . . . .   | 501 |
| 13.  | Morphismes de topos annelés . . . . .  | 508 |
| 14.  | Modules sur un topos défini par recollement . . . . .  | 515 |
|      | Index terminologique . . . . .   | 520 |
|      | Index des notations . . . . .  | 524 |