Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Allgemeines über unendliche Reihen und Produkte.

Seite

Nr. 1. Convergenz unendlicher Reihen . . . . 1—3

Nr. 2. Bedingt und unbedingt convergente Reihen. Die Funktion $\zeta(s) = \sum n^{-s}$ . . . . 3—5

Nr. 3. Satz über das Produkt zweier Reihen . . . . 5—6

Nr. 4. Convergenz (unbedingte) eines unendlichen Produktes . 6—8

Nr. 5. Die Euler'sche Gleichheit zwischen einem unendlichen Produkte und einer unendlichen Reihe. Die Summe $\sum \left(\frac{D}{n}\right) n^{-s}$ . . . . 8—12

Zweiter Abschnitt.

Die Zerfällung der Zahlen in Summanden.

Nr. 1. Keim der Euler'schen Untersuchungen. Der Binomialcoefficient . . . . 13—14

Nr. 2. Convergenz des unendlichen Produktes $\prod_i (1 + x_i z)$ und seine Entwicklung nach Potenzen von z . . . . . 14—17

Nr. 3. Das Produkt $\prod_i \left(\frac{1}{1 + x_i z}\right)$ . . . . 17—18

Nr. 4. Das Produkt $P = \prod_i (1 + x^i z)$ und $Q = \prod_i \left(\frac{1}{1 + x^i z}\right)$. Zerfällungen einer Zahl in m Summanden und solche in Summanden aus der Reihe 1, 2, 3, ... m . . . . . 18—22

Nr. 5. Das Produkt $\prod_i (1 - x^i)$. Satz über Pentagonalzahlen . . . . 22—25

Nr. 6. Der Euler'sche Satz über die Summe aller Theiler einer Zahl. Sätze von Zeller und von Stern . . . . 25—29

Nr. 7. Die Euler'sche Formel $\prod_i (1 + x^i) = \prod_i \left(\frac{1}{1 - x^{2i-1}}\right)$ und ihre arithmetische Folgerung. Zerfällung einer Zahl in eine Summe von Potenzen von 2 . . . . . . 29—31

Seite

Nr. 8. Jacobi's Formel

$$\prod_i (1-x^i)^3 = \sum_i (-1)^i (2i+1)\, x^{\frac{i^2+i}{2}}$$

direkt hergeleitet . . . . 31—34

Nr. 9. Ihre arithmetische Bestätigung nach Jacobi . . . . 35—37

Nr. 10. Sätze über die Zerfällung einer Zahl $24h+3$ in die Summe dreier Quadratzahlen . . . . 37—40

Nr. 11. Herleitung zweier Formeln von Gauss und von Jacobi, welche der Theorie der elliptischen Funktionen angehören, nach Lebesgue . . . . 40—43

Nr. 12. Arithmetische Folgerungen . . . . 43—45

Dritter Abschnitt.

Ueber die Dirichlet'schen Reihen.

Nr. 1. Allgemeiner Satz über die Summe $\sum_n \left(\frac{D}{n}\right)$. . . . . 45—50

Nr. 2. Ursprung der Dirichlet'schen Methoden aus Legendre's Versuch, das Reciprocitätsgesetz, insbesondere den Hilfssatz von der arithmetischen Progression zu beweisen . . . . 50—52

Nr. 3. Die Dirichlet'schen Reihen. Princip von Abel über die Stetigkeit von Reihen, deren Glieder Funktionen einer Veränderlichen s sind. Beispiel . . . . 52—54

Nr. 4. Allgemeiner Satz von der Reihe $\sum_n a_n \psi_n(s)$ . . . . 54—56

Nr. 5. Anwendung auf die Dirichlet'schen Reihen . . . . 56—59

Nr. 6. Die Gleichung $\lim_{\varrho=0} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$.

Gleichheit zweier Dirichlet'schen Reihen. . . . . . 59—62

Nr. 7 u. 8. Herleitung des allgemeinen Dirichlet'schen Satzes über den Grenzwerth einer Reihe. Specieller Fall: die Reihe $\sum_n \frac{1}{(b+an)^{1+\varrho}}$. . . . . 62—70

Nr. 9. Dirichlet's Beweis. . . . . 71—73

Vierter Abschnitt.

Der Satz von der arithmetischen Progression.

Nr. 1. Aufstellung des Satzes. Ursprung der Dirichlet'schen Beweismethode . . . . 74 - 75

Nr. 2. Die Zahlencharaktere $\chi(n)$ und ihre Haupteigenschaften . . . . 75—79

Nr. 3. Die Summen von der Form $\sum \frac{\chi(n)}{n^{1+\varrho}}$; drei Arten derselben . . . . 79—81

Seite

Nr. 4. Umformung der Reihen der zweiten Art. Grenzwerthe der Reihen der ersten und der zweiten Art für $\varrho=0$; dass der letztere nicht Null ist, wird später (Nr. 5 des 6. Abschnitts) sich zeigen . . . . 81—83

Nr. 5 u. 6. Grenzwerth der Reihen der dritten Art und Nachweis, dass er nicht Null sein kann . . . . 83—87

Nr. 7. Beweis des Satzes von der arithmetischen Progression . . . . 87—88

Fünfter Abschnitt.

Die Classenanzahl quadratischer Formen. Grundformel.

Nr. 1. Die betreffenden Arbeiten von Gauss, Dirichlet und Kronecker . . . . 89—90

Nr. 2. Das Grundprincip der Methode. Die Funktion $\psi(m)$. Herleitung der Formel

$$\tau\cdot\sum\psi(m)\cdot F(m)$$

$$=\sum F(ax^2+2bxy+cy^2)+\cdots\ (x,y\ \text{rel. prim})$$

im Falle einer negativen Determinante . . . . 90—93

Nr. 3. Der Fall einer positiven Determinante; Ungleichheitsbedingungen, die zu erfüllen sind, wenn die Pell'sche Gleichung unendlich viele Lösungen hat . . . . 93—96

Nr. 4. Die Funktion $f(m)=\sum\psi\left(\frac{m}{\mu^2}\right)$ und die Gleichung

$$\tau\cdot\sum f(m)\cdot F(m)$$

$$=\sum F(ax^2+2bxy+cy^2)+\cdots$$ . . . 96—97

u. 6. Sätze über die Funktionen $\psi(m)$ und $f(m)$. Die Reihe $\Phi=\sum_{\varpi}\frac{f(p^{\varpi})}{p^{s\varpi}}$. . . . . 97—105

Nr. 7. Die Grundformel

$$\tau\cdot\sum f(m)\,m^{-s}=\sum(ax^2+2bxy+cy^2)^{-s}+\cdots$$

Ihre Convergenz für $s>1$ . . . . 105—108

Nr. 8. Beweis, dass die Pell'sche Gleichung bei positiver Determinante unendlich viele Lösungen hat . . . . 108—111

Nr. 9. Specielle Formen der Grundformel. Erste Folgerung: über die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl durch das Formensystem der Determinante D; die Fälle $D<0$ und $D>0$ sind zu trennen . . . . 111—115

Nr. 10. Zweite Folgerung: Zusammenhang mit der Theorie der elliptischen Funktionen, wenn $D<0$ ist; der Fall $D>0$ . . . . 115—117

Sechster Abschnitt.

Bestimmung der Classenanzahl durch eine unendliche Reihe.

		Seite
Nr. 1.	Geometrischer Hilfssatz über das Verhältniss eines Flächenstücks zur Anzahl von Netzpunkten in seinem Innern	118—121
Nr. 2.	Anwendung auf die Anzahl N der Systeme x, y ganzer Zahlen, für welche $ax^2 + 2bxy + cy^2 < M$ ist	121—125
Nr. 3.	Grenzwerth von $\varrho \cdot \sum (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-(1+\varrho)}$ für $\varrho = 0$	126—129
Nr. 4.	Derselbe bei beschränkterem Umfange der Summation	129—132
Nr. 5.	Es giebt nur eine endliche Anzahl H von Classen quadratischer Formen; ihr Ausdruck durch eine unendliche Reihe. Ausfüllung der Lücke in Nr. 4 des 4. Abschnittes	132—133
Nr. 6.	Gauss' Herleitung der Formel für die Classenanzahl	133—139
Nr. 7.	Zurückführung der letztern auf den Fall, in welchem die Determinante frei ist von quadratischen Theilern	140—143
Nr. 8.	Eine interessante bezügliche Bemerkung von Dirichlet (vgl. 9. Abschnitt Nr. 6)	143—145

Siebenter Abschnitt.

Die Gaussischen Summen.

Nr. 1.	Einleitende historische Bemerkungen	145—148
Nr. 2.	Die elementaren Eigenschaften der Gaussischen Summen $\varphi(m, n)$	149—151
Nr. 3.	Ihre Zurückführung auf den Fall, wo n Primzahl ist. Die Bestimmung ihres absoluten Werthes	151—156
Nr. 4.	Dirichlet's Methode zur Bestimmung des Vorzeichens des letztern. Fundamentale Reciprocitätsbeziehung.	156—161
Nr. 5.	Der 4. Gaussische Beweis des Reciprocitätsgesetzes quadratischer Reste	161—163
Nr. 6.	Der Werth der Gaussischen Summen einschliesslich des Vorzeichens. Die Hilfsformel zur Berechnung der Classenanzahl	163—167
Nr. 7.	Einfacher Algorithmus zur Werthbestimmung der Gaussischen Summen und des Jacobi'schen Symbols, nach Kronecker	167—169
Nr. 8.	Methode von Cauchy; sie beruht auf Jacobi's Formel für die lineare Transformation der Thetafunktionen. Cauchy's Fundamentalsatz über complexe Integration	169—172
Nr. 9.	Seine Anwendung zur Herleitung einer wichtigen Integralformel	172—174

Seite

Nr. 10. Herleitung der Jacobi'schen Formel aus Cauchy's Fundamentalsatz . . . . 174—177
Nr. 11. Der Cauchy'sche Grenzfall derselben führt zur Bestimmung der Gaussischen Summen . . . . 178—179
Nr. 12. Umgekehrt gewinnt man aus der letztern die Transformationsgleichung von Jacobi . . . . 179—183
Nr. 13. Direkte Bestimmung der Gaussischen Summen mittels Cauchy's Fundamentalsatz . . . . 183—187

Achter Abschnitt.

Berechnung der Classenanzahl.

Nr. 1. Zweierlei Wege zur Berechnung der Summe

$$S = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

Erster Weg: Die rationale Integration. Nothwendige Formeln . . . . 188—193
Nr. 2. Berechnung der Summen S für die verschiedenen Fälle, welche die Determinante D bietet . . . . . 193—199
Nr. 3. Tabelle für die Ausdrücke der Classenanzahl, welche diesen Fällen entsprechen . . . . 199—205
Nr. 4. Der zweite Weg führt auf trigonometrische Reihen zurück. Bestimmung von S für den Fall einer negativen Determinante . . . . 205—213
Nr. 5. Vervollständigung der Tabelle für die Ausdrücke der Classenanzahl. Vergleichung dieser Ausdrücke. Eine Bestätigung von Cauchy. Merkwürdige arithmetische Folgerungen . . . . 213—219
Nr. 6 u. 7. Die Umformung der Ausdrücke für den Fall einer positiven Determinante mittels der Kreistheilungsauflösung der Pell'schen Gleichung. Arithmetische Folgerung . . . . 219—227
Nr. 8. Weitere Ausdrücke für die Classenanzahl. Beziehung der Ausdrücke für den Fall einer positiven und einer negativen Determinante zu einander . . . . 227—232

Neunter Abschnitt.

Die Geschlechter der quadratischen Formen.

Nr. 1. Die Geschlechtscharaktere der quadratischen Formen und ihrer Classen . . . . 233—236
Nr. 2. Die Anzahl der überhaupt möglichen Geschlechter. Nachweis ihrer Existenz, auf Grund des Satzes von der arithmetischen Progression . . . . 236—240
Nr. 3 u. 4. Direkter Nachweis mittels der Dirichlet'schen Methoden. Die Funktion $k(n)$ . . . . 240—246
Nr. 5. Sätze über Composition von Formen, Classen und Geschlechtern. Die Classen des Hauptgeschlechts . 246—250
Nr. 6. Regelmässige und unregelmässige Determinanten;

Seite

der Exponent der Irregularität. Anschliessende Sätze und Bemerkungen; unendlich viel positive Determinanten, für welche jedes Geschlecht nur eine Classe enthält. . . . . 250—255

Nr. 7. Ambige Classen und Classen, welche durch Duplikation entstehen . . . . 255—256

Nr. 8. Hilfssatz über Zusammensetzung von Classen. Neue Definition der Classen, welche durch Duplikation entstehen . . . . 256—258

Nr. 9—11. Bestimmung der Anzahl dieser Classen, nach Kronecker. Jede Classe des Hauptgeschlechts entsteht durch Duplikation. Die Anzahl der Ambigen gleich der Anzahl der Geschlechter . . . . 259—269

Nr. 12. Sätze von Schering . . . . 270—271

Zehnter Abschnitt.

Ausdehnung des Satzes von der arithmetischen Progression auf quadratische Formen.

Nr. 1. Der Dirichlet'sche Satz; Geschichtliches . . . . 272—273

Nr. 2. Einführung der Classencharaktere $K(C)$, ihre wichtigsten Eigenschaften und ihr Verhältniss zu der Funktion $k(n)$ des vorigen Abschnitts. . . . . . . 273—277

Nr. 3. Herleitung der Grundgleichung. Die Reihen L . . 278—282

Nr. 4. Die unter einander identischen Reihen L; nicht-identische aber gleiche Reihen . . . . 282—286

Nr. 5. Die Reihen L zerfallen in drei Arten. Grenzwerthe der Reihen der 1. und 2. Art für $\varrho = 0$ . . . . . . 286—290

Nr. 6. Untersuchung der Reihen der 3. Art . . . . 290—295

Nr. 7. Beweis des Dirichlet'schen Satzes. . . . . 295—297

Nr. 8 u. 9. Nachträglicher Beweis dafür, dass die Reihen 2. und 3. Art nebst ihren Ableitungen nach ϱ endliche und stetige Funktionen von ϱ sind für $\varrho \geqq 0$. 297—307

Elfter Abschnitt.

Zahlentheoretische Funktionen.

Nr. 1. Ausgangspunkt: ein einfacher Satz der Combinationslehre. Die Funktion $\mu(n)$ von Mertens . . . 308—310

Nr. 2. Ein allgemeines Umkehrungsprincip. Vier Sätze von Lipschitz . . . . 310—315

Nr. 3. Ein besonderer Fall des Umkehrungsprincips . . . 315—317

Nr. 4. Ein zweiter besonderer Fall desselben; verschiedene Anwendungen; Satz von Legendre und sein Beweis von Jonquières und von Lipschitz . . . . 317—325

Nr. 5. Zusammenhang der Funktion $\mu(n)$ und anderer zahlentheoretischer Funktionen mit der Funktion $\zeta(s)$ . . . . 325—332

Nr. 6. Herleitung ihrer charakteristischen Eigenschaften aus diesem Zusammenhange . . . . 332—336

		Seite
Nr. 7.	Eine Verallgemeinerung, nach Cantor	336—338
Nr. 8.	Die analytische Natur der Funktion $\zeta(s)$, nach Riemann, verallgemeinert von Lipschitz u. A. . . .	338—341
Nr. 9.	Untersuchungen von Hurwitz. Die Funktionen $\zeta(s, a, m)$	341—347
Nr. 10.	Die Dirichlet'schen Reihen, welche bei der Bestimmung der Classenanzahl auftreten.	347—351

Zwölfter Abschnitt.

Die Häufigkeit der Primzahlen.

Nr. 1.	Asymptotische Ausdrücke. Die Euler'sche Summenformel und die Formel von Stirling.	352—354
Nr. 2.	Legendre's Formel für die Anzahl der Primzahlen unterhalb x. Tschebischeff's Untersuchung, Annäherung mittels des Integrallogarithmus	354—358
Nr. 3.	Die Grundformel und Analyse einer zweiten Untersuchung von Tschebischeff	358—361
Nr. 4.	Zwei Hilfssätze von Mertens	361—365
Nr. 5.	Seine Herleitung zweier Formeln von Legendre betr. die Summe der reciproken Primzahlen unterhalb x	366—371
Nr. 6 u. 7.	Vervollständigung dieser Untersuchung durch Bestimmung der Summen derjenigen reciproken Primzahlen, welche vorgeschriebene Linearform haben	371—380
Nr. 8.	Reihensatz von Tschebischeff	380—382
Nr. 9.	Riemann's Untersuchung über die Häufigkeit der Primzahlen. Zurückführung auf die Funktion $\zeta(s)$.	382—386
Nr. 10.	Einführung einer Funktion $\xi(t)$ an Stelle der letztern	386—391
Nr. 11.	Herleitung des Gesetzes der Primzahlen	392—396

Dreizehnter Abschnitt.

Die mittleren Werthe zahlentheoretischer Funktionen.

Nr. 1.	Verschiedene Bedeutung des Ausdrucks „mittlerer Werth". Erste Beispiele von Gauss	397—400
Nr. 2.	Mittlerer Werth für die Anzahl $T(n)$ und für die Summe $S(n)$ der Theiler von n, nach Dirichlet .	400—403
Nr. 3.	Allgemeine Transformationsgleichung von Dirichlet	403—407
Nr. 4.	Ein ausgezeichneter Fall derselben, bewiesen nach Césaro und nach Hermite, verallgemeinert von Lipschitz	407—413
Nr. 5.	Nochmals die Anzahl der Theiler. Formeln von Gegenbauer. Dirichlet's Untersuchung über ein die Division betreffendes Problem.	413—422
Nr. 6.	Mittlerer Werth der Funktion $\varphi(n)$. Vorbemerkung	422—424
Nr. 7.	Zwei Bestimmungen desselben: nach Dirichlet und nach Mertens	424—428

Seite

Nr. 8. Anzahl der Brüche, deren Zähler und Nenner nicht grösser sind als n. Wahrscheinlichkeit, dass zwei Zahlen $\leqq n$ relativ prim sind . . . . 429—430
Nr. 9. Mittlerer Werth für die Anzahl $P(n)$ der Zerlegungen von n in zwei relative Primzahlen. Zwei Bestimmungen desselben: nach Dirichlet und nach Mertens . . . . 430—436
Nr. 10. Verallgemeinerung des geometrischen Hilfssatzes in Nr. 1 des 6. Abschnittes . . . . 436—438
Nr. 11. Eine allgemeine Aufgabe von Lipschitz . . . . . 438—440
Nr. 12. Ihre Lösung . . . . 440—444
Nr. 13. Erstes Beispiel: die Anzahl aller eigentlichen Darstellungen einer Zahl durch eine positive quadratische Form von mehreren Unbestimmten . . . . . 444—447
Nr. 14. Eine Aufgabe von Césaro . . . . 447—450
Nr. 15. Zweites Beispiel: die Funktion $P(n)$ . . . . 450—453
Nr. 16. Drittes Beispiel: die mittlere Anzahl der Classen von negativer Determinante . . . . 453—459
Nr. 17. Direkte Bestimmung dieser mittleren Anzahl nach Mertens . . . . 459—465
Nr. 18. Zusammenhang der Dirichlet'schen Reihen mit der Bestimmung der mittleren Werthe . . . . 465—468
Nr. 19. Entwicklung von $\zeta(1+\varrho)$ nach Potenzen von ϱ . . 468—470
Nr. 20. Nochmals die Funktionen $T(n)$ und $P(n)$ . . . . . 470—472
Nr. 21. Die mittlere Anzahl der Geschlechter quadratischer Formen . . . . 472—479
Nr. 22. Halphèn's Methode zur Bestimmung der mittleren Werthe . . . . 480—484
Zusätze . . . . 485—494