Inhalts-Verzeichniss.

Erste Vorlesung.

Das Problem der Kreistheilung.

Seite

Nr. 1. Das Problem der Kreistheilung 1

Nr. 2—4. Zurückführung des geometrischen Problems auf ein algebraisches 3

Zweite Vorlesung.

Ein arithmetischer Hilfssatz. 8

Dritte Vorlesung.

Von den Einheitswurzeln und ihren einfachsten Eigenschaften.

Nr. 1. Jede n^{te} Einheitswurzel gehört zu einem Exponenten, welcher ein Theiler von n ist 12

Nr. 2. Anzahl der primitiven Wurzeln 13

Nr. 3. Anzahl der Wurzeln, welche zu einem Divisor d von n gehören 13

Nr. 4. Sätze über primitive Wurzeln und ihr Verhältniss zu den nicht primitiven 14

Nr. 5. Die Gleichung, welcher die primitiven n^{ten} Einheitswurzeln genügen 14

Nr. 6. Reduction des Falles, in welchem n eine zusammengesetzte Zahl ist, auf den Fall einer Primzahlpotenz. Hinfort sei n eine Primzahl 17

Nr. 7. Einige einfache Bemerkungen über Einheitswurzeln . . . 18

Vierte Vorlesung.

Hilfssätze über Congruenzen. Die primitiven Wurzeln (mod. p).

Nr. 1. Definitionen und Fundamentalsatz 20

Nr. 2. Gaussischer Satz über Zerlegbarkeit ganzer und ganzzahliger Functionen 21

Nr. 3 und 4. Die Gleichung für die p^{ten} Potenzen der Wurzeln einer andern Gleichung 22

Seite

Nr. 5. Eine allgemeine, aus dem polynomischen Satze geschöpfte Folgerung 24
Nr. 6. Der Fermat'sche Satz und seine Anwendung auf Nrn. 3 und 4. 25
Nr. 7. Anzahl der Wurzeln, welche eine Congruenz haben kann . 26
Nr. 8. Wilson'scher Satz 28
Nr. 9 und 10. Die primitiven Wurzeln und die Indices (mod. p) . 28

Fünfte Vorlesung.

Von der Irreductibilität der Kreistheilungsgleichung.

Nr. 1. Irreductible Gleichungen und Hauptsätze über dieselben . 31
Nr. 2. Das gemeinsame Princip der Beweise für die Irreductibilität der Kreistheilungsgleichung 32
Nr. 3 und 4. Zwei Beweise von Kronecker für die Irreductibilität der Gleichung $\frac{x^{p^a}-1}{x^{p^{a-1}}-1}=0$. 33
Nr. 5. Beweis von Eisenstein 36
Nr. 6. Beweis von Arndt für die Irreductibilität der Gleichung $F_n(x)=0$. 37
Nr. 7. Irreductibilität der Kreistheilungsgleichung im weitern Sinne, nach Kronecker 40

Sechste Vorlesung.

Die Gauss'sche Methode zur Auflösung der Kreistheilungsgleichung. Die Perioden und ihre Eigenschaften.

Nr. 1. Anordnung der Einheitswurzeln mittels der primitiven Wurzeln (mod. p) 43
Nr. 2. Bemerkung über die Methoden zur algebraischen Auflösung der Gleichungen 44
Nr. 3. Reduction der Functionen der Einheitswurzeln auf die Normalform 45
Nr. 4—6. Die e $f$gliedrigen Perioden, ihre einfachsten Eigenschaften und einige Sätze über dieselben 46
Nr. 7. Dieselben sind die Wurzeln einer irreductibeln Gleichung mit ganzzahligen Coëfficienten 51
Nr. 8. Die Gleichung, welcher die in einer der Perioden enthaltenen Einheitswurzeln genügen 53
Nr. 9. Die e' f'gliedrigen Perioden, welche eine der $f$gliedrigen zusammensetzen 54
Nr. 10. Die Gauss'sche Auflösungsmethode 56
Nr. 11. Die Theilung des Kreises in p gleiche Theile ist durch Cirkel und Lineal ausführbar, wenn $p=2^m+1$ ist. Die Perioden von gerader Gliederzahl sind reell 57

Seite

Siebente Vorlesung.

Beispiele.

Nr. 1. Der Fall $p = 5$; Construction des regulären Fünfecks . . 59
Nr. 2. Der Fall $p = 13$ 61
Nr. 3 und 4. Der Fall $p = 17$; Construction des regulären Siebenzehnecks 63
Anhang: Construction desselben nach v. Staudt 69

Achte Vorlesung.

Algebraische Auflösung der Hilfsgleichungen. Die Resolvante und ihre Eigenschaften.

Nr. 1 bis 3. Bestimmung der $e' f'$ gliedrigen Perioden mittels der Resolvante (α, η'_0) und der ihr conjugirten Grössen, wenn die $e f$ gliedrigen Perioden bekannt sind 75
Nr. 4. Anwendung dieser Theorie zur directen Bestimmung der $e f$ gliedrigen Perioden und zur Auflösung der Kreistheilungsgleichung 81
Nr. 5. Eigenschaften der Resolvante (ω^k, r). Der Werth von $\frac{(\omega^h, r) \cdot (\omega^k, r)}{(\omega^{h+k}, r)}$ 83
Nr. 6. Die Formel $(\omega^h, r) \cdot (\omega^{-h}, r) = (-1)^h \cdot p$ 86
Nr. 7 und 8. Formeln zur Berechnung der $e f$ gliedrigen Perioden und der Wurzeln der Kreistheilungsgleichung selbst 88
Nr. 9. Berechnung der Functionen $\psi_x (\omega^h)$. 93
Nr. 10. Historische Bemerkungen. Beispiele zur allgemeinen Theorie. 95

Neunte Vorlesung.

Anwendung der Kreistheilung auf die Theorie der quadratischen Reste.

Nr. 1. Definition und Criterium der n^{ten} Potenzreste (mod. p) . . 99
Nr. 2. Einfachste Sätze über quadratische Reste und Nichtreste. Der quadratische Character der negativen Einheit. Das Legendresche Reciprocitätsgesetz 100
Nr. 3. Die Grundformel aus der Kreistheilung 103
Nr. 4 und 5. Bestimmung des Vorzeichens in derselben nach Kronecker's Methode 107
Nr. 6. Beweis des Reciprocitätsgesetzes nach Gauss 111
Nr. 7. Eisenstein's arithmetischer Beweis desselben, auf die Kreistheilung zurückgeführt 113
Nr. 8. Zusammenhang desselben mit Lebesgue's Beweis . . . 116
Nr. 9. Drei ähnliche Beweise von Eisenstein, Liouville und Gauss 118

Seite

Zehnte Vorlesung.

Anwendung der Kreistheilung zur Zerlegung der Zahlen in Quadrate.

Nr. 1. Zerlegung der Primzahl p in zwei conjugirte complexe Zahlen. 122
Nr. 2. Jacobi's Satz über die Function $\psi(h, k, g)$ 126
Nr. 3. Die Gleichung $p = a^2 + b^2$, wenn p von der Form $4n + 1$ ist. 128
Nr. 4 und 5. Bestimmung des Restes, den die ungerade Zahl a (mod. 4) lässt 129
Nr. 6 und 7. Gaussische Methode zur directen Bestimmung von a und b 133

Elfte Vorlesung.

Fortsetzung: Die Fälle $p = 6n + 1$, $p = 8n + 1$.

Nr. 1. Die Gleichung $4p = A^2 + 3B^2$, wenn p von der Form $6n + 1$ ist 138
Nr. 2. Bestimmung des Restes von A (mod. 3) 139
Nr. 3. Directe Bestimmung der Zahlen A und B 141
Nr. 4. Die Gleichung $p = a^2 + 2b^2$, wenn p von der Form $8n + 1$ ist. 144
Nr. 5. Directe Bestimmung der Zahlen a und b 146
Nr. 6. Bestimmung des Restes von a (mod. 4) 147

Zwölfte Vorlesung.

Die complexen ganzen Zahlen von der Form $a + bi$.

Nr. 1 und 2. Historisches. Definitionen und einfachste Sätze . . 150
Nr. 3. Die complexen Primzahlen 153
Nr. 4. Berechnung des grössten gemeinsamen Theilers zweier Zahlen. Ableitung des Fundamentalsatzes von der Zerlegbarkeit der Zahlen in Primfactoren 154
Nr. 5. Congruente Zahlen. Restsystem, Anzahl der incongruenten Zahlclassen 156
Nr. 6. Der Fermat'sche Satz in der Theorie der complexen Zahlen. 158
Nr. 7 bis 9. Einfache Sätze über den biquadratischen Character einer Zahl. Der biquadratische Character von i 159
Nr. 10. Verallgemeinerung des Legendre'schen Symbols durch Jacobi, und einfache Sätze über das verallgemeinerte Symbol. 161

Dreizehnte Vorlesung.

Das Reciprocitätsgesetz der biquadratischen Reste.

Nr. 1 und 2. Die Grundformel aus der Kreistheilung 168
Nr. 3. Einführung der primären complexen Factoren von p . . . 171
Nr. 4 bis 6. Beweis des biquadratischen, sowie des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der complexen Zahlen . . 173
Nr. 7. Der Ergänzungssatz über den biquadratischen Character von $1 + i$ 181

Seite

Vierzehnte Vorlesung.

Die complexen Zahlen $a + b\varrho$. Das Reciprocitätsgesetz für die cubischen Reste.

Nr. 1. Definitionen und einfachste Sätze 185
Nr. 2. Die complexen Primzahlen. Zerlegung der Zahlen in Primfactoren 187
Nr. 3. Der grösste gemeinsame Theiler zweier complexer Zahlen. Congruente Zahlen und Anzahl der incongruenten Rest-Classen. 188
Nr. 4 und 5. Der Fermat'sche Satz in dieser Theorie complexer Zahlen. Der cubische Character einer Zahl und die einfachsten Gesetze, denen er gehorcht. Der cubische Character von ϱ . 190
Nr. 6. Grundformel aus der Kreistheilung. Einführung der primären Primfactoren von p 193
Nr. 7. Beweis des cubischen Reciprocitätsgesetzes 195

Fünfzehnte Vorlesung.

Die Bildung der Periodengleichungen. Zerfällung von X in Factoren. Die Ergänzungssätze.

Nr. 1. Die Kummer'schen Formeln zur Multiplication der Perioden. 199
Nr. 2. Berechnung der Gleichung für die beiden $\frac{p-1}{2}$-gliedrigen Perioden. Der quadratische Character von -1 203
Nr. 3. Die Gleichung $4 \cdot \frac{x^p-1}{x-1} = Y(x)^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p \cdot Z(x)^2$, und Eigenschaften der ganzen Functionen $Y(x)$ und $Z(x)$. Der quadratische Character der Zwei 205
Nr. 4. Berechnung der Gleichung für die Perioden von $\frac{p-1}{3}$ Gliedern, wenn $p = 6n + 1$. Ihr Zusammenhang mit der Gleichung $4p = A^2 + 3B^2$ 209
Nr. 5. Begründung desselben durch Betrachtung der Function $\psi(h, k, g)$. 213
Nr. 6. Untersuchungen, betreffend die genaue Bestimmung der drei Perioden 216
Nr. 7 und 8. Die Gleichung, welcher die in einer Periode enthaltenen Wurzeln genügen. Darstellung von $27 \cdot \frac{x^p-1}{x-1}$ durch eine cubische Form. Der Ergänzungssatz zum cubischen Reciprocitätsgesetz, cubischer Character von 3 und von $1-\varrho$ . . 220

Sechszehnte Vorlesung.

Fortsetzung: Der Fall $p = 4n + 1$.

Nr. 1 und 2. Die Gleichung für die Perioden von $\frac{p-1}{4}$ Gliedern, wenn $p = 8n + 1$ 224

Seite

Nr. 3. Dieselbe für den Fall $p = 8n + 5$ 228

Nr 4. Darstellung von $256 \cdot \frac{x^p - 1}{x - 1}$ durch eine biquadratische Form. 231

Nr. 5 und 6. Der biquadratische Character der Zwei 232

Siebenzehnte Vorlesung.

Die Periodencongruenzen.

Nr. 1. Die Gleichung $F(y) = 0$, welcher die efgliedrigen Perioden genügen, wird als Congruenz in Bezug auf einen Primzahlmodulus aufgefasst 237

Nr. 2. Die Congruenz $F(y) \equiv 0$ (mod. p) hat die einzige reelle Wurzel $y \equiv f$ (mod. p) 239

Nr. 3. Bedingung für die Möglichkeit der Congruenz $F(y) \equiv 0$ (mod. q). Der Fall einer Primzahl q, welche e^{ter} Potenzrest (mod. p) ist 240

Nr. 4. Drei besondere Fälle. Neuer Beweis des Legendre'schen Reciprocitätsgesetzes 241

Nr. 5. Die Producte $\psi(\eta)$ und ihre Eigenschaften 244

Nr. 6. Zuordnung der Gleichungs- und Congruenzwurzeln, begründet auf die Functionen $\psi(\eta)$. Hauptsatz. Specieller Fall desselben, betreffend die Theilbarkeit von $Nf(\eta_0)$ durch die Primzahl q . 248

Achtzehnte Vorlesung.

Die Theorie der aus Einheitswurzeln gebildeten complexen ganzen Zahlen.

Nr. 1. Definitionen 251

Nr. 2 bis 4. Sätze über die Zerlegbarkeit einer Primzahl q, welche (mod. p) zum Exponenten f gehört, in complexe Factoren. Ist sie möglich, so enthalten die Factoren nur die efgliedrigen Perioden, und q ist die Norm eines jeden Factors. Die Zerlegung ist jedoch nicht immer möglich 253

Nr. 5. Die nicht zerlegbaren reellen Primzahlen spielen nicht die Rolle complexer Primfactoren 257

Nr. 6 und 7. Einführung der idealen Primfactoren und ihre Definition durch Congruenzbedingungen 258

Nr. 8. Die so definirten idealen Primfactoren zeigen alle Eigenschaften, welche Primzahlen zukommen 262

Nr. 9. Die Primfactoren von p 265

Nr. 10. Darstellung der complexen Zahlen als Producte idealer Primfactoren 267

Seite

Neunzehnte Vorlesung.

Anwendung der Theorie der complexen Zahlen auf die Kreistheilung.

Nr. 1. Hilfssatz 269
Nr. 2 und 3. Zerlegung von $\psi_k(r)$ in seine idealen Primfactoren . 271
Nr. 4. Darstellung von $(r, R)^p$ durch seine idealen Primfactoren . 275
Nr. 5. Beispiel: $(r, R)^5$, wenn $R^{11} = 1$, $r^5 = 1$ ist 277

Zwanzigste Vorlesung.

Zwei Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Formen.

Nr. 1. Die Eigenschaften der Function $\psi(h, k, \omega)$ 279
Nr. 2. Bildung des Productes $(\omega^{-m_1}, R) . (\omega^{-m_2}, R) \dots (\omega^{-m_\alpha}, R)$. Die Function $\Psi(\omega)$ 280
Nr. 3. Congruenzen, zu welchen die Substitution einer primitiven Wurzel γ statt ω hinführt 282
Nr. 4 und 5. Bildung der Producte $\prod\limits_a (\omega^{-a\mu}, R)$ und $\prod\limits_b (\omega^{-b\mu}, R)$, sowie Ableitung der Gleichung $4 . q^{\frac{p-1}{2}} = (A_0 + A_1)^2 + p . (A_0 - A_1)^2$ für den Fall $p = 4n + 3$ 284
Nr. 6. Indem man mit der höchsten Potenz von q, welche $(A_0 + A_1)^2$ und $(A_0 - A_1)^2$ gemeinsam ist, dividirt, gelangt man zu der Formel $4 . q^{\frac{\Sigma b - \Sigma a}{p}} = x^2 + p . y^2$. Congruenzbedingung für x. Der Fall $p = 8n + 7$, Beispiel $p = 7$ 287
Nr. 7. Zusammenhang der Untersuchung mit der Anzahl der Classen äquivalenter Formen für eine negative Determinante 292
Nr. 8. Auflösung der Pell'schen Gleichung mittels der Formel für $4X$ in Nr. 3 der 15. Vorlesung. Der Fall $p = 4n + 1$ . . . 294
Nr. 9. Der Fall $p = 4n + 3$ 296
Nr. 10. Zusammenhang der so bestimmten Auflösungen mit der Anzahl der Classen äquivalenter Formen für eine positive Determinante 297