INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel I

Unendliche Mengen

§ 1. Allgemeine Mengen

1. Der Begriff der Menge 13
2. Abzählbare Mengen 15
3. Elementare Eigenschaften abzählbarer Mengen 16
4. Vereinigungsmengen von höchstens abzählbar vielen Mengen 17
5. Beispiele abzählbarer Mengen 19
6. Nichtabzählbare unendliche Mengen 21
7. Die Mächtigkeiten unendlicher Mengen 22

§ 2. Punktmengen

8. n-dimensionale Räume 23
9. Konvergenz von Punktfolgen. Umgebungen 26
10. Häufungsstellen 27
11. Abgeschlossenheit einer Menge. Derivierte Mengen 30
12. Offene Mengen. Rand einer Menge 33
13. Bereiche 36

§ 3. Weitere Diskussion der infinitären Eigenschaften von Mengen

14. Der Borelsche Überdeckungssatz 37
15. Der Häufungsstellensatz 39
16. Extrema abgeschlossener Zahlenmengen 42
17. Obere und untere Grenze 43

Kapitel II

Funktionen auf Mengen

§ 4. Konvergenz von Funktionen auf Punktmengen

18. Definition von Funktionen auf Mengen 46
19. Konvergenz einer Funktion auf einer Punktmenge 47
20. Ein Übertragungsprinzip 48
21. Das Cauchy-Bolzanosche Konvergenzkriterium 51

§ 5. Stetigkeit von Funktionen auf Punktmengen

22. Stetige Punktfunktionen 52
23. Der Satz von der gleichmässigen Stetigkeit 53
24. Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen auf abgeschlossenen Mengen 55
25. Die Zwischenwertsätze 57

Kapitel III

Unendliche Folgen und Reihen

§ 6. Unendliche Folgen

26. $\overline{\lim}\, a_\nu$ 60
27. $\underline{\lim}\, a_\nu$. Anwendung auf die Konvergenzdiskussion 62
28. Unbestimmtheitsgrenzen beim beliebigen Grenzübergang 64
29. Der Cauchysche Grenzwertsatz 65

§ 7. Unendliche Reihen

30. Nocheinmal das Quotienten- und das Wurzelkriterium 68
31. Weitere elementare Kriterien 71
32. Das Maclaurin-Cauchysche Integralkriterium 75
33. Absolut konvergente Reihen 80
34. Der Riemannsche Satz über bedingt konvergente Reihen 85
35. Die Abelschen Konvergenzkriterien 86
36. Unendliche Produkte 89

§ 8. Funktionenfolgen und Funktionenreihen

37. Begriff der gleichmässigen Konvergenz bei Funktionenfolgen 92
38. Bedingungen für die gleichmässige Konvergenz bei Funktionenfolgen und -reihen 94
39. Weitere Kriterien für die gleichmässige Konvergenz 96
40. Gliedweise Integration und Differentiation 99
41. Vertauschung von Grenzübergängen 103
42. Der allgemeine Vertauschungssatz 105

§ 9. Potenzreihen

43. Konvergenzverhältnisse bei Potenzreihen 106
44. Eigenschaften der Summe einer Potenzreihe. Funktionen $J_n(x)$ . . . 111
45. Direkte Begründung der Theorie von e^x, $\sin x$, $\cos x$ 114
46. Die allgemeine Binomialreihe 119
47. Die allgemeine binomische Formel 121
48. Der Approximationssatz von Weierstrass für stückweise lineare stetige Funktionen 124
49. Der Approximationssatz von Weierstrass für stetige Funktionen . . . 126

Kapitel IV

Ergänzungen zur Differentialrechnung

§ 10. Weitere Anwendungen der Differentialrechnung auf Diskussion der Funktionen einer Variablen

50. Grenzwerte, die die unbestimmte Form ∞/∞ annehmen 128
51. Vertauschbare Operatoren 130
52. Einige Anwendungen des Rechnens mit Operatoren 134
53. Extrema bei Funktionen einer Variablen 138
54. $f(x)/g(x)$ im Falle gemeinsamer Nullstellen 141
55. Stückweise stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktionen 142
56. Stieltjesintegrale. Definition. Existenz 146
57. Eigenschaften der Stieltjesintegrale. Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung 149

§ 11. Differentiation bei Funktionen mehrerer Variablen

58. Funktion zweier Variablen und Funktion des Punktes 152
59. Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Variablen 155
60. Der Gradient 156

§ 12. Partielle Ableitungen höherer Ordnung

61. Höhere partielle Ableitungen. Vertauschbarkeit der Differentiationsordnung 162
62. Der Taylorsche Satz für Funktionen mehrerer Variablen 166
63. Eulerscher Satz über homogene Funktionen 169

§ 13. Jacobische Matrizen und Determinanten

64. Matrizentheoretische Grundbegriffe 172
65. Die Jacobische Matrix und Determinante 177
66. Bedingungen für die Schlichtheit einer Abbildung 181

§ 14. Das totale Differential

67. Der Cauchysche Differentialbegriff 184
68. Legendresche Transformation. Höhere Differentiale 188
69. Differentiable Funktionen und totales Differential 190
70. Totales Differential und Richtungsableitungen am Rande 193
71. Gleichmässige Differenzierbarkeit 195

Kapitel V

Anwendungen der Differentialrechnung auf die Analysis

15. Existenz der Lösungen von Gleichungen und Gleichungssystemen. Implizite Funktionen

72. Formulierung des Existenzsatzes für Lösungen von Gleichungen und Gleichungssysteme 200
73. Beweis des Existenzsatzes 202
74. Ableitungen impliziter Funktionen 204

§ 16. Umkehrung von Abbildungen und Funktionensystemen

75. Umkehrung einer schlichten stetig differenzierbaren Abbildung . . . 207
76. Auflösung von Gleichungen und Gleichungssystemen in der Nähe angenäherter Lösungen . . . 209
77. Partielle Umkehrung eines Funktionensystems . . . 213
78. Hinreichende Bedingungen für die Unabhängigkeit von Funktionensystemen . . . 216
79. Hinreichende Bedingungen für die Abhängigkeit von Funktionensystemen . . . 217

§ 17. Extrema bei Funktionen mehrerer Variablen

80. Quadratische Formen . . . 221
81. Notwendige Bedingungen . . . 222
82. Diskussion mittels der notwendigen Bedingungen . . . 223
83. Hinreichende Bedingungen . . . 225
84. Beispiele . . . 228
85. Extrema mit Nebenbedingungen . . . 229
86. Der Hadamardsche Determinantensatz . . . 232

Kapitel VI

Numerische Rechenmethoden

§ 18. Anwendungen der Differentialrechnung auf Interpolation

87. Lineare Interpolation . . . 235
88. Weitere Ausführungen zur linearen Interpolation . . . 239
89. Interpolation höherer Ordnung. Lagrangesche Interpolationsformel . 241
90. Die Gregory-Newtonsche Interpolationsformel. Das Differenzenschema 243

§ 19. Numerische Differentiation und Integration

91. Numerische Differentiation . . . 249
92. Numerische Integration. Die Trapezformel . . . 253
93. Numerische Integration. Die Simpsonsche Regel . . . 256
94. Beispiele . . . 260
95. Numerische Integration. Die Gaußsche Methode . . . 265

§ 20. Angenäherte Auflösung von Gleichungen

96. Angenäherte Auflösung von Gleichungen nach der Newton-Raphsonschen Regel. Fehlerabschätzung . . . 269
97. Die Fourier-Bedingungen für die Konvergenz des Newton-Raphsonschen Verfahrens . . . 272
98. Eine weitere Konvergenzbedingung für das Newton-Raphsonsche Verfahren . . . 275
99. Regula falsi . . . 279

§ 21. Bernoullische Zahlen und Polynome

100. Definition der Bernoullischen Zahlen und Polynome 281
101. Einige Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen und Polynome . . . 283
102. Integrale mit $B_m(t)$ als Kern 285

§ 22. Die Euler-Maclaurinsche Formel

103. Die Euler-Maclaurinsche Formel 287
104. Eine Umformung der Euler-Maclaurinschen Formel. Die Stirlingsche Reihe 289
105. Das Wallische Produkt und die Stirlingsche Konstante 292

Kapitel VII

Allgemeines über Kurven. Ebene Kurven

§ 23. Grössen erster Ordnung in der Kurventheorie

106. Parameterdarstellung von Kurven in der Ebene und im Raum. Reguläre und singuläre Punkte 295
107. Darstellung von Raumkurven als Schnittkurven von Flächen . . . 298
108. Bogenlänge bei glatten und stückweise glatten Bögen 301
109. Zylinderkoordinaten und Polarkoordinaten im Raume 305
110. Beliebige rektifizierbare Kurven 308

§ 24. Grössen zweiter Ordnung in der Kurventheorie

111. Krümmung 313
112. Krümmungskreis und Krümmungsmittelpunkt 316
113. Beispiele für die Bestimmung der Krümmung und des Krümmungsmittelpunktes 319

§ 25. Evolute, Evolvente und Parallelkurven

114. Die Evolute 320
115. Die Evolute im Falle des stetigen monotonen Krümmungsradius . . 325
116. Die Evolvente 326
117. Parallelkurven 328

§ 26. Enveloppen von Kurvenscharen

118. Bedingung für die Enveloppe der Schar $y = f(x, c)$ 331
119. Weitere Ausführungen über die Enveloppen von Kurvenscharen . . 333
120. Beispiele zur Enveloppentheorie 336

Kapitel VIII

Raumkurven und Flächen

§ 27. Vektoren

121. Begriff des Vektors 339
122. Das innere Produkt 342
123. Das äussere Produkt 344

§ 28. Die Schmiegungsebene einer Raumkurve

124. Ortsvektor und Tangentenvektor 348
125. Die Schmiegungsebene im einfachsten Fall 349
126. Durchsetzung der Raumkurve durch die Schmiegungsebene 350

§ 29. Krümmung und Torsion

127. Das begleitende Dreikant 352
128. Die Frenetschen Formeln 355
129. Darstellungen von Krümmung und Torsion 357
130. Vorzeichen der Torsion 359

§ 30. Tangentialebene und Flächennormale

131. Tangentialebene 361
132. Flächennormale 364
133. Beispiele. Durchsetzung der Fläche durch die Tangentialebene . . . 366

§ 31. Weitere Ausführungen über Flächen (Enveloppen; Geometrie auf der Fläche)

134. Enveloppen von einparametrigen Flächenscharen 369
135. Enveloppen von zweiparametrigen Flächenscharen 371
136. Das Bogenelement auf einer Fläche 372
137. Winkel auf der Fläche 375

Register 377