

INHALTSVERZEICHNIS

VIII. Die Stammfunktion (Das unbestimmte Integral)

§ 1. Das unbestimmte Integral und die einfachsten Verfahren zu seiner Berechnung	13
263. Der Begriff der Stammfunktion (und des unbestimmten Integrals) ..	13
264. Das Integral und die Bestimmung des Flächeninhalts	16
265. Tabelle der Grundintegrale	19
266. Die einfachsten Integrationsregeln	20
267. Beispiele	21
268. Integration durch Substitution der Veränderlichen	25
269. Beispiele	29
270. Partielle Integration	33
271. Beispiele	34
§ 2. Die Integration rationaler Ausdrücke	38
272. Problemstellung der Integration in geschlossener Form	38
273. Partialbrüche und ihre Integration	39
274. Die Zerlegung von echten Brüchen in Partialbrüche	41
275. Bestimmung der Koeffizienten. Die Integration von Partialbrüchen ..	44
276. Abtrennung des rationalen Teils eines Integrals	46
277. Beispiele	49
§ 3. Integration von Wurzelausdrücken	52
278. Integration von Ausdrücken der Form $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$. Beispiele	52
279. Integration von binomischen Differentialen. Beispiele	54
280. Rekursionsformeln	56
281. Integration von Ausdrücken der Form $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$. Die Eulerschen Substitutionen	59
282. Geometrische Behandlung der Eulerschen Substitutionen	61
283. Beispiele	63
284. Andere Verfahren zur Berechnung eines Integrals der Gestalt (4) ..	68
285. Beispiele	74
§ 4. Integration von trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktionen	77
286. Integration von Ausdrücken der Form $R(\sin x, \cos x) dx$	77
287. Integration von Ausdrücken der Form $\sin^r x \cos^u x$	79
288. Beispiele	81
289. Überblick über die anderen Fälle	86
§ 5. Elliptische Integrale	87
290. Allgemeine Bemerkungen und Definitionen	87
291. Hilfsttransformationen	89

292. Reduktion auf die Normalform	92
293. Elliptische Integrale erster, zweiter und dritter Gattung	94

IX. Das bestimmte Integral

§ 1. Definition und Bedingungen für die Existenz des bestimmten Integrals .	98
294. Ein anderer Weg zur Bestimmung des Flächeninhalts	98
295. Definition	100
296. Die Darboux'schen Summen	101
297. Bedingung für die Existenz des bestimmten Integrals	104
298. Klassen integrierbarer Funktionen	105
299. Eigenschaften integrierbarer Funktionen	107
300. Beispiele und Ergänzungen	109
301. Das untere und das obere Integral als Grenzwert	110
§ 2. Eigenschaften der bestimmten Integrale	112
302. Das Integral über ein orientiertes Intervall	112
303. Eigenschaften, die sich in Gleichungen ausdrücken	113
304. Eigenschaften, die sich in Ungleichungen ausdrücken	114
305. Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze	119
306. Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung	121
§ 3. Berechnung und Darstellung bestimmter Integrale	124
307. Berechnung mit Hilfe der Integralsummen	124
308. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	127
309. Beispiele	128
310. Eine andere Herleitung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung	132
311. Rekursionsformeln	133
312. Beispiele	134
313. Die Substitution der Veränderlichen im bestimmten Integral	137
314. Beispiele	138
315. Die Gauß'sche Formel. Die Landensche Transformation	144
316. Eine andere Herleitung der Formel für die Substitution der Veränderlichen	147
§ 4. Einige Anwendungen der bestimmten Integrale	149
317. Die Wallissche Formel	149
318. Die Taylorsche Formel mit Restglied	150
319. Die Transzendenz der Zahl e	151
320. Die Legendreschen Polynome	152
321. Ungleichungen zwischen Integralen	155
§ 5. Näherungsweise Berechnung von Integralen	158
322. Problemstellung, Rechteckformel und Trapezformel	158
323. Parabolische Interpolation	160
324. Die Zerlegung des Integrationsintervalls	163
325. Der Fehler bei der Rechteckformel	164
326. Der Fehler bei der Trapezformel	166
327. Der Fehler bei der Simpsonschen Regel	167
328. Beispiele	169

X. Anwendungen der Integralrechnung in Geometrie, Mechanik und Physik

§ 1. Die Länge einer Kurve	175
329. Berechnung der Länge einer Kurve	175
330. Ein anderer Weg zur Definition und zur Berechnung der Länge einer Kurve	177
331. Beispiele	180
332. Die natürliche Gleichung einer ebenen Kurve	187
333. Beispiele	190
334. Die Bogenlänge einer Raumkurve	193
§ 2. Flächeninhalte und Volumina	194
335. Definition des Flächeninhalts und seine Additivität	194
336. Der Flächeninhalt als Grenzwert	195
337. Klassen quadrierbarer Gebiete	197
338. Die Darstellung des Flächeninhalts durch ein Integral	199
339. Beispiele	202
340. Definition des Volumens. Seine Eigenschaften	209
341. Die Klassen der Körper, die ein Volumen besitzen	211
342. Die Berechnung des Volumens mit Hilfe eines Integrals	212
343. Beispiele	215
344. Der Inhalt einer Rotationsfläche	222
345. Beispiele	225
346. Der Inhalt einer Zylinderfläche	227
347. Beispiele	229
§ 3. Die Berechnung mechanischer und physikalischer Größen	232
348. Die Anwendung des bestimmten Integrals	232
349. Die Berechnung des statischen Moments und des Schwerpunktes einer mit Masse belegten Kurve	235
350. Beispiele	237
351. Berechnung des statischen Moments und des Schwerpunktes einer ebenen Figur	238
352. Beispiele	240
353. Der Begriff der mechanischen Arbeit	241
354. Beispiele	243
355. Die Arbeit der Reibungskraft in einem flachen Zapfen	245
356. Aufgaben zur Summierung unendlich kleiner Größen	247
§ 4. Die einfachsten Differentialgleichungen	253
357. Grundbegriffe. Differentialgleichungen erster Ordnung	253
358. Differentialgleichungen ersten Grades. Trennung der Veränderlichen	254
359. Aufgaben	257
360. Bemerkungen zur Aufstellung von Differentialgleichungen	263
361. Aufgaben	264

XI. Unendliche Reihen mit konstanten Gliedern

§ 1. Einführung	269
362. Grundbegriffe	269
363. Beispiele	270
364. Hauptsätze	272

§ 2. Die Konvergenz positiver Reihen	274
365. Bedingung für die Konvergenz einer positiven Reihe	274
366. Vergleichskriterien	277
367. Beispiele	279
368. Das Cauchysche und das d'Alembertsche Kriterium	283
369. Das Raabesche Kriterium	285
370. Beispiele	287
371. Das Kummersche Kriterium	290
372. Das Gaußsche Kriterium	292
373. Das Maclaurin-Cauchysche Integralkriterium	294
374. Das Ermakoffsche Kriterium	298
375. Ergänzungen	301
§ 3. Die Konvergenz beliebiger Reihen	306
376. Allgemeine Bedingung für die Konvergenz einer Reihe	306
377. Die absolute Konvergenz	307
378. Beispiele	309
379. Die Potenzreihe und ihr Konvergenzbereich	310
380. Der Konvergenzradius in Abhängigkeit von den Koeffizienten	312
381. Alternierende Reihen	314
382. Beispiele	316
383. Die Abelsche partielle Summation	318
384. Die Kriterien von ABEL und DIRICHLET	319
385. Beispiele	321
§ 4. Eigenschaften konvergenter Reihen	325
386. Das Assoziationsgesetz	325
387. Die Umordnungseigenschaft absolut konvergenter Reihen	327
388. Nicht-absolut konvergente Reihen	329
389. Die Multiplikation von Reihen	332
390. Beispiele	335
391. Ein allgemeiner Satz aus der Theorie der Grenzwerte	337
392. Weitere Sätze über die Multiplikation von Reihen	340
§ 5. Zweifache Reihen und Doppelreihen	342
393. Zweifache Reihen	342
394. Doppelreihen	345
395. Beispiele	350
396. Potenzreihen in zwei Veränderlichen. Der Konvergenzbereich	358
397. Beispiele	360
398. Mehrfache Reihen	362
§ 6. Unendliche Produkte	362
399. Grundbegriffe	362
400. Beispiele	363
401. Grundlegende Sätze. Der Zusammenhang mit den unendlichen Reihen	365
402. Beispiele	368
§ 7. Die Entwicklungen der elementaren Funktionen	376
403. Die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe. Die Taylorsche Reihe	376

404. Die Entwicklung der trigonometrischen Funktionen und anderer Funktionen in eine Potenzreihe	378
405. Die logarithmische Reihe	381
406. Die Stirlingsche Formel	382
407. Die binomische Reihe	384
408. Die Zerlegung von Sinus und Kosinus in unendliche Produkte	387
§ 8. Näherungsrechnungen mit Hilfe von Reihen. Reihentransformation	391
409. Allgemeine Bemerkungen	391
410. Berechnung der Zahl π	392
411. Berechnung von Logarithmen	394
412. Berechnung von Wurzeln	397
413. Die Eulersche Reihentransformation	398
414. Beispiele	401
415. Die Kummersche Reihentransformation	403
416. Die Markoffsche Reihentransformation	406
§ 9. Summierung divergenter Reihen	408
417. Einführung	408
418. Die Potenzreihenmethode	410
419. Der Taubersche Satz	413
420. Die Methode der arithmetischen Mittel	415
421. Die Wechselbeziehung zwischen der Abel-Poissonschen und der Cesàroschen Methode	417
422. Der Hardy-Landausche Satz	419
423. Anwendung der verallgemeinerten Summierung auf die Reihemultiplikation	422
424. Andere Methoden zur verallgemeinerten Summierung von Reihen ..	423
425. Beispiele	428
426. Die allgemeine Klasse der linearen und regulären Summierungsmethoden	432
 XII. Funktionenfolgen und Funktionenreihen	
§ 1. Gleichmäßige Konvergenz	435
427. Einleitende Bemerkungen	435
428. Gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz	437
429. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz	441
430. Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz	443
§ 2. Eigenschaften der Summe einer Reihe	446
431. Die Stetigkeit der Summe einer Reihe	446
432. Bemerkung über die quasi-gleichmäßige Konvergenz	448
433. Gliedweiser Übergang zum Grenzwert	450
434. Gliedweise Integration von Reihen	452
435. Gliedweise Differentiation von Reihen	454
436. Betrachtung vom Standpunkt der Theorie der Folgen	457
437. Die Stetigkeit der Summe einer Potenzreihe	460
438. Integration und Differentiation von Potenzreihen	463

§ 3. Anwendungen	466
439. Beispiele für die Stetigkeit der Summe einer Reihe und für den gliedweisen Übergang zum Grenzwert	466
440. Beispiele für die gliedweise Integration von Reihen	473
441. Beispiele für die gliedweise Differentiation von Reihen	484
442. Die Methode der sukzessiven Approximation in der Theorie der impliziten Funktionen	490
443. Analytische Definition der trigonometrischen Funktionen	493
444. Beispiel einer stetigen Funktion ohne Ableitung	496
§ 4. Ergänzende Ausführungen über Potenzreihen	498
445. Operationen mit Potenzreihen	498
446. Substitution einer Reihe in eine andere	501
447. Beispiele	504
448. Division von Potenzreihen	509
449. Die Bernoullischen Zahlen. Entwicklungen, in denen sie auftreten ..	512
450. Das Lösen von Gleichungen mit Hilfe von Reihen	516
451. Umkehrung von Potenzreihen	520
452. Die Lagrangesche Reihe	523
§ 5. Elementare Funktionen einer komplexen Veränderlichen	527
453. Komplexe Zahlen	527
454. Die komplexe Zahlenfolge und ihr Grenzwert	529
455. Funktionen einer komplexen Veränderlichen	532
456. Potenzreihen	534
457. Die Exponentialfunktion	537
458. Die logarithmische Funktion	539
459. Die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen ...	542
460. Die Potenzfunktion	545
461. Beispiele	546
§ 6. Asymptotische Reihen. Die Eulersche Summenformel	552
462. Beispiele	552
463. Definitionen	554
464. Die grundlegenden Eigenschaften asymptotischer Entwicklungen ..	557
465. Die Herleitung der Eulerschen Summenformel	561
466. Untersuchung des Restgliedes	563
467. Beispiele für die Anwendung der Eulerschen Summenformel	565
468. Eine andere Gestalt der Eulerschen Summenformel	569
469. Stirlingsche Formel und Stirlingsche Reihe	571

XIII. Uneigentliche Integrale

§ 1. Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen	574
470. Definition des Integrals mit unendlichen Grenzen	574
471. Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung	576
472. Beispiele	577
472. Die Analogie zu Reihen. Die einfachsten Sätze	580
474. Die Konvergenz eines Integrals im Fall einer positiven Funktion ..	581
475. Allgemeine Konvergenzkriterien	583
476. Das Abelsche und das Dirichletsche Kriterium	585

477. Zurückführung eines uneigentlichen Integrals auf eine unendliche Reihe	588
478. Beispiele	591
§ 2. Uneigentliche Integrale nichtbeschränkter Funktionen	599
479. Definition des Integrals einer nichtbeschränkten Funktion	599
480. Eine Bemerkung über die singulären Stellen	602
481. Anwendung des Hauptsatzes der Integralrechnung. Beispiele	604
482. Bedingungen und Kriterien für die Existenz eines Integrals.....	605
483. Beispiele	609
484. Die Hauptwerte uneigentlicher Integrale	612
485. Eine Bemerkung über verallgemeinerte Werte divergenter Integrale	617
§ 3. Eigenschaften und Umformung uneigentlicher Integrale	619
486. Die einfachsten Eigenschaften	619
487. Mittelwertsätze	621
488. Partielle Integration bei uneigentlichen Integralen	623
489. Beispiele	624
490. Variablensubstitution in uneigentlichen Integralen	626
491. Beispiele	627
§ 4. Spezielle Verfahren zur Berechnung uneigentlicher Integrale	633
492. Einige bemerkenswerte Integrale	633
493. Berechnung uneigentlicher Integrale mit Hilfe von Integralsummen. Integrale mit endlichen Grenzen	636
494. Integrale mit unendlichen Grenzen	638
495. Die Frullanischen Integrale	642
496. Integrale rationaler Funktionen zwischen unendlichen Grenzen ...	645
497. Beispiele und Übungen	650
§ 5. Angenäherte Berechnung uneigentlicher Integrale	664
498. Integrale mit endlichen Grenzen. Abspaltung der Singularitäten ...	664
499. Beispiele	665
500. Eine Bemerkung zur angenäherten Berechnung „eigentlicher“ Integrale	669
501. Angenäherte Berechnung uneigentlicher Integrale mit unendlichen Grenzen	670
502. Verwendung der asymptotischen Entwicklungen	673
 XIV. Integrale, die von einem Parameter abhängen	
§ 1. Elementare Theorie	677
503. Aufgabenstellung	677
504. Gleichmäßige Annäherung an die Grenzfunktion	677
505. Vertauschung zweier Grenzübergänge	680
506. Grenzübergang unter dem Integralzeichen	682
507. Differentiation unter dem Integralzeichen	684
508. Integration unter dem Integralzeichen	686
509. Übertragung auf den Fall veränderlicher Integrationsgrenzen	688
510. Einführung eines nur von x abhängigen Faktors	690
511. Beispiele	692
512. Einer der vier Gaußschen Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra	704

§ 2. Gleichmäßige Konvergenz	706
513. Die Definition der gleichmäßigen Konvergenz	706
514. Ein Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz: Der Zusammen- hang mit unendlichen Reihen	707
515. Hinreichende Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz	708
516. Ein anderer Fall von gleichmäßiger Konvergenz	710
517. Beispiele	712
§ 3. Die Anwendung der gleichmäßigen Konvergenz	717
518. Grenzübergang unter dem Integralzeichen	717
519. Beispiele	720
520. Stetigkeit und Differenzierbarkeit eines Integrals bezüglich des Parameters	735
521. Integration eines Integrals nach dem Parameter	739
522. Die Berechnung einiger Integrale	742
523. Beispiele für die Differentiation unter dem Integralzeichen	748
524. Beispiele für die Integration unter dem Integralzeichen	760
§ 4. Ergänzungen	771
525. Der Satz von ARZELÀ	771
526. Der Grenzübergang unter dem Integralzeichen	772
527. Die Differentiation unter dem Integralzeichen	775
528. Die Integration unter dem Integralzeichen	776
§ 5. Die Eulerschen Integrale	778
529. Das Eulersche Integral erster Gattung	778
530. Das Eulersche Integral zweiter Gattung	780
531. Die einfachsten Eigenschaften der Gammafunktion	781
532. Die eindeutige Definition der Gammafunktion durch ihre Eigen- schaften	788
533. Eine andere Funktionaleigenschaft der Gammafunktion	790
534. Beispiele	792
535. Die logarithmische Ableitung der Gammafunktion	800
536. Der Multiplikationssatz für die Gammafunktion	802
537. Einige Reihenentwicklungen und Produktzerlegungen	803
538. Beispiele und Ergänzungen	805
539. Berechnung einiger bestimmter Integrale	812
540. Die Stirlingsche Formel	820
541. Berechnung der Eulerschen Konstanten	824
542. Aufstellung von Tafeln für die dekadischen Logarithmen der Gamma- funktion	825
Namen- und Sachverzeichnis	827
Berechnung wichtiger Integrale	836