

INHALTSVERZEICHNIS

Einführung. Die reellen Zahlen	1
§ 1. Der Bereich der rationalen Zahlen	1
1. Vorbemerkungen	1
2. Die Ordnung des Bereichs der rationalen Zahlen	2
3. Addition und Subtraktion rationaler Zahlen	2
4. Multiplikation und Division rationaler Zahlen	4
5. Das Archimedische Axiom	6
§ 2. Einführung der irrationalen Zahlen. Ordnung des Bereichs der reellen Zahlen	7
6. Definition der irrationalen Zahl	7
7. Die Ordnung des Bereichs der reellen Zahlen	9
8. Hilfssätze	10
9. Die Darstellung reeller Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche	11
10. Die Stetigkeit des Bereichs der reellen Zahlen	14
11. Grenzen von Zahlenmengen	15
§ 3. Die Rechenoperationen mit reellen Zahlen	17
12. Definition der Summe reeller Zahlen	17
13. Eigenschaften der Addition	18
14. Definition des Produktes reeller Zahlen	19
15. Eigenschaften der Multiplikation	20
16. Schlußbemerkungen	22
17. Absolute Beträge	23
§ 4. Weitere Eigenschaften und Anwendungen der reellen Zahlen	23
18. Existenz der Wurzel. Potenz mit rationalem Exponenten	23
19. Die Potenz mit beliebigem reellem Exponenten	25
20. Der Logarithmus	27
21. Das Messen von Strecken	28
I. Theorie der Grenzwerte	31
§ 1. Folgen und ihre Grenzwerte	31
22. Veränderliche Größen, Folgen	31
23. Der Grenzwert einer diskreten Veränderlichen	34
24. Unendlich kleine Größen	35
25. Beispiele	36
26. Einige Sätze über Folgen, die einen Grenzwert haben	41
27. Unendlich große Größen	42
§ 2. Sätze über Grenzwerte, die ihre rechnerische Bestimmung erleichtern	44
28. Grenzübergänge bei Gleichungen und Ungleichungen	44
29. Hilfssätze über unendlich kleine Größen	46

30. Arithmetische Operationen mit Veränderlichen	47
31. Unbestimmte Ausdrücke	48
32. Beispiele für die Bestimmung von Grenzwerten	50
33. Der Stolz'sche Satz und seine Anwendung	55
§ 3. Monotone Folgen	58
34. Grenzwert monotoner Folgen	58
35. Beispiele	60
36. Die Zahl e	65
37. Näherungsweise Berechnung der Zahl e	67
38. Ein Lemma über Intervallschachtelungen	70
§ 4. Das Konvergenzprinzip. Teilfolgen. Partielle Grenzwerte	71
39. Das Konvergenzprinzip	71
40. Teilfolgen und ihre Grenzwerte	73
41. Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS	75
42. Der größte und der kleinste partielle Grenzwert	77
II. Funktionen einer Veränderlichen	80
§ 1. Der Funktionsbegriff	80
43. Die Veränderliche und ihr Variationsbereich	80
44. Funktionale Abhängigkeit zwischen Veränderlichen. Beispiele	81
45. Die Definition des Funktionsbegriffs	82
46. Die analytische Methode zur Vorgabe von Funktionen	84
47. Graphische Darstellung von Funktionen	87
48. Die wichtigsten Funktionenklassen	89
49. Der Begriff der Umkehrfunktion	93
50. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	95
51. Verkettung von Funktionen. Schlußbemerkungen	99
§ 2. Grenzwert einer Funktion	100
52. Definition des Grenzwertes einer Funktion	100
53. Zurückführung auf den Fall einer diskreten Veränderlichen	102
54. Beispiele	104
55. Erweiterung der Theorie der Grenzwerte	113
56. Beispiele	115
57. Der Grenzwert einer monotonen Funktion	117
58. Das allgemeine Kriterium von BOLZANO-CAUCHY	119
59. Größter und kleinster Grenzwert einer Funktion	120
§ 3. Klassifikation unendlich kleiner und unendlich großer Größen	120
60. Vergleich unendlich kleiner Größen	120
61. Die Skala der unendlich kleinen Größen	122
62. Äquivalente unendlich kleine Größen	124
63. Aussonderung des Hauptteils	125
64. Aufgaben	127
65. Klassifikation unendlich großer Größen	129
§ 4. Stetigkeit (und Unstetigkeit) von Funktionen	130
66. Definition der Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt	130
67. Das Rechnen mit stetigen Funktionen	132
68. Beispiele stetiger Funktionen	133

69. Einseitige Stetigkeit. Klassifikation der Unstetigkeitsstellen	134
70. Beispiele unstetiger Funktionen	135
71. Stetigkeit und Unstetigkeit der monotonen Funktionen	138
72. Die Stetigkeit der elementaren Funktionen	139
73. Verkettung stetiger Funktionen	140
74. Lösung einer Funktionalgleichung	141
75. Charakterisierung der Exponential-, der Logarithmus- und der Potenzfunktion durch Funktionalgleichungen	142
76. Funktionalgleichungen der trigonometrischen Funktionen und der Hyperbelfunktionen	144
77. Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe der Stetigkeit von Funktionen	146
78. Potenz-Exponentialausdrücke	149
79. Beispiele	150
§ 5. Eigenschaften der stetigen Funktionen	151
80. Der erste Zwischenwertsatz	151
81. Anwendung auf die Lösung von Gleichungen	153
82. Zweiter Zwischenwertsatz	154
83. Die Existenz der Umkehrfunktion	155
84. Der Satz über Beschränktheit einer Funktion	157
85. Größter und kleinster Wert einer Funktion	158
86. Die gleichmäßige Stetigkeit	160
87. Der Satz von CANTOR	161
88. Der Heine-Borel-Lebesguesche Überdeckungssatz	163
89. Weitere Beweise der grundlegenden Sätze	164
III. Ableitungen und Differentiale	168
§ 1. Die Ableitung und ihre Berechnung	168
90. Berechnung der Geschwindigkeit eines sich bewegenden Punktes ...	168
91. Die Tangente an eine Kurve	169
92. Definition der Ableitung	171
93. Beispiele für die Berechnung der Ableitung	175
94. Die Ableitung der inversen Funktion	178
95. Formeln für Ableitungen	179
96. Eine Formel für den Zuwachs der Funktion	180
97. Einfachste Regeln zur Berechnung der Ableitungen	181
98. Die Ableitung mittelbarer Funktionen (Kettenregel)	183
99. Beispiele	184
100. Einseitige Ableitungen	191
101. Unendliche Ableitungen	192
102. Weitere bemerkenswerte Beispiele	193
§ 2. Das Differential	194
103. Definition des Differentials	194
104. Zusammenhang zwischen der Existenz des Differentials und der Existenz der Ableitung	195
105. Grundlegende Formeln und Regeln für die Bildung von Differentialen	197
106. Invarianz des Differentials	198
107. Näherungsformeln mit Hilfe von Differentialen	200
108. Anwendung von Differentialen bei der Fehlerabschätzung	202

§ 3. Grundlegende Sätze der Differentialrechnung	204
109. Der Satz von FERMAT	204
110. Der Satz von DARBOUX	206
111. Der Satz von ROLLE	207
112. Der erste Mittelwertsatz der Differentialrechnung	208
113. Der Grenzwert der Ableitung	210
114. Die Cauchysche Formel (zweiter Mittelwertsatz)	211
§ 4. Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung	212
115. Definition der Ableitungen höherer Ordnung	212
116. Allgemeine Formeln für Ableitungen höherer Ordnung	214
117. Die Leibnizsche Formel	217
118. Beispiele	219
119. Differentiale höherer Ordnung	222
120. Nichtinvarianz der Differentiale höherer Ordnung	223
121. Differentiation nach dem Parameter	224
122. Endliche Differenzen	225
§ 5. Die Taylorsche Formel	227
123. Die Taylorsche Formel für ein Polynom	227
124. Entwicklung einer beliebigen Funktion. Das Restglied in der Peano- schen Form	228
125. Beispiele	232
126. Andere Formen des Restgliedes	235
127. Näherungsformeln	237
§ 6. Interpolation	243
128. Die Grundaufgabe der Interpolation. Die Formel von LAGRANGE ...	243
129. Das Restglied der Lagrangeschen Formel	244
130. Interpolation mit mehrfachen Punkten. Die Hermitesche Formel ...	245
IV. Untersuchung von Funktionen mit Hilfe der Ableitungen	248
§ 1. Studium des Funktionsverlaufs	248
131. Eine Bedingung dafür, daß eine Funktion eine Konstante ist	248
132. Eine Bedingung für die Monotonie einer Funktion	250
133. Beweis von Ungleichungen	252
134. Maxima und Minima. Notwendige Bedingungen	256
135. Hinreichende Bedingungen. Erste Regel	257
136. Beispiele	259
137. Zweite Regel	264
138. Die Benutzung höherer Ableitungen	266
139. Das Aufsuchen größter und kleinster Werte	268
140. Aufgaben	269
§ 2. Konvexe (und konkave) Funktionen	274
141. Definition einer konvexen (konkaven) Funktion	274
142. Einfachste Sätze über konvexe Funktionen	275
143. Bedingungen für die Konvexität einer Funktion	277
144. Die Jensensche Ungleichung und ihre Anwendung	280
145. Wendepunkte	282

§ 3. Das Zeichnen von Kurven	284
146. Aufgabenstellung	284
147. Das Schema zur Konstruktion einer Kurve. Beispiele	285
148. Unendlichkeitsstellen. Unendliche Intervalle. Asymptoten	287
149. Beispiele	290
§ 4. Auswertung unbestimmter Ausdrücke	293
150. Der unbestimmte Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$	293
151. Der unbestimmte Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$	299
152. Andere Formen unbestimmter Ausdrücke	301
§ 5. Die angenäherte Lösung von Gleichungen	303
153. Einführende Bemerkungen	303
154. Die Regula falsi (Sehnenmethode)	304
155. Die Newtonsche Regel (Tangentenmethode)	307
156. Beispiele und Übungen	309
157. Die kombinierte Methode	314
158. Beispiele und Übungen	315
V. Funktionen mehrerer Veränderlicher	319
§ 1. Grundbegriffe	319
159. Funktionale Abhängigkeit zwischen Veränderlichen. Beispiele	319
160. Funktionen zweier Veränderlicher und ihr Definitionsbereich	320
161. Der arithmetische n -dimensionale Raum	323
162. Beispiele für Bereiche im n -dimensionalen Raum	326
163. Allgemeine Definition des offenen und des abgeschlossenen Bereichs ..	328
164. Funktionen von n Veränderlichen	331
165. Grenzwert von Funktionen mehrerer Veränderlicher	332
166. Reduktion auf Folgen	334
167. Beispiele	336
168. Iterierte Grenzwerte	338
§ 2. Stetige Funktionen	340
169. Stetigkeit und Unstetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher	340
170. Das Rechnen mit stetigen Funktionen	342
171. In einem Bereich stetige Funktionen. Die Sätze von BOLZANO-CAUCHY	343
172. Der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS	344
173. Die Weierstraßschen Sätze	346
174. Die gleichmäßige Stetigkeit	347
175. Der Überdeckungssatz	348
176. Weitere Beweise der grundlegenden Sätze	350
§ 3. Ableitungen und Differentiale von Funktionen mehrerer Veränderlicher ..	351
177. Partielle Ableitungen und partielle Differentiale	351
178. Der vollständige (totale) Zuwachs einer Funktion	354
179. Das vollständige Differential	357
180. Geometrische Deutung im Fall einer Funktion zweier Veränderlicher	359
181. Ableitungen mittelbarer Funktionen	362
182. Beispiele	363

183. Der Mittelwertsatz	366
184. Die Ableitung in einer bestimmten Richtung	367
185. Die Invarianz des (ersten) Differentials	369
186. Anwendung des vollständigen Differentials in der Näherungsrechnung	371
187. Homogene Funktionen	374
188. Die Eulersche Formel	375
§ 4. Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung	376
189. Ableitungen höherer Ordnung	376
190. Der Satz über die gemischten Ableitungen	379
191. Verallgemeinerung	382
192. Ableitungen höherer Ordnung für mittelbare Funktionen	383
193. Differentiale höherer Ordnung	384
194. Differentiale mittelbarer Funktionen	388
195. Die Taylorsche Formel	389
§ 5. Extremwerte. GröÙte und kleinste Werte	391
196. Extremwerte einer Funktion mehrerer Veränderlicher. Notwendige Bedingungen	391
197. Hinreichende Bedingungen (für Funktionen zweier Veränderlicher) ..	393
198. Hinreichende Bedingungen (der allgemeine Fall)	396
199. Bedingungen dafür, daß kein Extremum vorliegt	399
200. GröÙte und kleinste Werte einer Funktion. Beispiele	401
201. Aufgaben	405
VI. Funktionaldeterminanten und ihre Anwendung	414
§ 1. Formale Eigenschaften der Funktionaldeterminanten	414
202. Definition der Funktionaldeterminante	414
203. Multiplikation von Funktionaldeterminanten	414
204. Multiplikation von Funktionalmatrizen (Jacobischen Matrizen)	416
§ 2. Implizite Funktionen	419
205. Der Begriff der impliziten Funktion einer Veränderlichen	419
206. Existenz der impliziten Funktion	421
207. Die Differenzierbarkeit der impliziten Funktion	423
208. Implizite Funktionen mehrerer Veränderlicher	424
209. Berechnung der Ableitungen impliziter Funktionen	430
210. Beispiele	433
§ 3. Einige Anwendungen der Theorie der impliziten Funktionen	438
211. Extrema mit Nebenbedingungen	438
212. Die Lagrangeschen Multiplikatoren (unbestimmte Faktoren)	441
213. Hinreichende Bedingungen für ein Extremum mit Nebenbedingungen	442
214. Beispiele und Aufgaben	443
215. Der Begriff der Unabhängigkeit von Funktionen	447
216. Der Rang einer Funktionalmatrix	449
§ 4. Variablensubstitution	453
217. Funktionen einer Veränderlichen	453
218. Beispiele	455
219. Funktionen mehrerer Veränderlicher. Ersetzung der unabhängigen Veränderlichen	457

220. Differentiale	459
221. Der allgemeine Fall einer Variablensubstitution	460
222. Beispiele	463
VII. Anwendungen der Differentialrechnung in der Geometrie	472
§ 1. Analytische Darstellung von Kurven und Flächen	472
223. Kurven in der Ebene (in rechtwinkligen Koordinaten)	472
224. Beispiele	474
225. Mechanisch erzeugte Kurven	477
226. Kurven in der Ebene (in Polarkoordinaten). Beispiele	480
227. Flächen und Kurven im Raum	485
228. Parameterdarstellung	486
229. Beispiele	488
§ 2. Tangente und Tangentialebene	491
230. Die Tangente an eine ebene Kurve in rechtwinkligen Koordinaten ..	491
231. Beispiele	493
232. Die Tangente in Polarkoordinaten	495
233. Beispiele	496
234. Die Tangente an eine Raumkurve. Die Tangentialebene an eine Fläche	497
235. Beispiele	501
236. Singuläre Punkte ebener Kurven	502
237. Parameterdarstellung der Kurve	506
§ 3. Berührung von Kurven	508
238. Die Einhüllende einer Kurvenschar	508
239. Beispiele	511
240. Charakteristische Punkte	514
241. Ordnung der Berührung zweier Kurven	516
242. Eine der Kurven ist implizit gegeben	518
243. Schmiegunskurven	519
244. Ein anderer Zugang zu den Schmiegunskurven	521
§ 4. Die Länge einer ebenen Kurve	522
245. Hilfssätze	522
246. Richtung auf einer Kurve	523
247. Die Länge einer Kurve. Additivität der Bogenlänge	524
248. Hinreichende Bedingungen für die Rektifizierbarkeit. Differential der	Bogenlänge
249. Der Bogen als Parameter. Positive Richtung der Tangente	526
249. Der Bogen als Parameter. Positive Richtung der Tangente	529
§ 5. Die Krümmung einer ebenen Kurve	532
250. Die Krümmung	532
251. Krümmungskreis und Krümmungsradius	535
252. Beispiele	536
253. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes	541
254. Evolute und Evolvente. Abwicklung der Evolute	542
255. Eigenschaften von Evolute und Evolvente	545
256. Bestimmung der Evolvente	547

Anhang. Das Problem der Erweiterung von Funktionen	550
257. Bemerkungen zum Funktionsbegriff	550
258. Funktionen einer Veränderlichen	551
259. Die Problemstellung im zweidimensionalen Fall	553
260. Der Hauptsatz über die Erweiterung	555
261. Verallgemeinerung	559
262. Schlußbemerkungen	560
Namen- und Sachverzeichnis	563