

# TABLE DES MATIÈRES

## DU TOME 1

<i>CHAPITRE I. — EXEMPLES PHYSIQUES</i> .....	1
<b>Introduction</b> .....	2
 <i>PARTIE A. — LES MODÈLES PHYSIQUES</i> .....	 3
<b>§ 1. Fluides classiques et système de Navier-Stokes</b> .....	3
1. Introduction : Origine mécanique .....	3
2. Problème mathématique correspondant .....	6
3. Linéarisation. Équations de Stokes .....	9
4. Cas d'un fluide parfait. Équations d'Euler .....	10
5. Cas des écoulements stationnaires. Exemples de problèmes linéaires ...	11
6. Écoulements non stationnaires conduisant à des équations de diffusion visqueuse .....	18
7. Transmission de la chaleur. Exemple linéaire en mécanique des fluides	21
8. Exemple de la propagation acoustique .....	27
9. Exemple avec des conditions aux limites de dérivées obliques .....	30
<b>Bilan</b> .....	32
 <b>§ 2. Élasticité linéaire</b> .....	 33
1. Introduction : Élasticité; hyperélasticité .....	33
2. Élasticité linéaire (non nécessairement isotrope) .....	34
3. Élasticité linéaire isotrope (ou élasticité classique) .....	37
4. Problèmes stationnaires en élasticité classique .....	39
5. Problèmes dynamiques en élasticité classique .....	43
6. Problèmes de diffusion thermique. Thermoélasticité classique .....	54
<b>Bilan</b> .....	59
 <b>§ 3. Viscoélasticité linéaire</b> .....	 60
1. Introduction .....	60
2. Matériaux à mémoire courte .....	61
3. Matériaux à mémoire longue .....	62
4. Cas particulier des milieux isotropes .....	63
5. Problèmes stationnaires en viscoélasticité classique .....	67
<b>Bilan</b> .....	67
 <b>§ 4. Électromagnétisme et équations de Maxwell</b> .....	 68
1. Équations fondamentales de l'électromagnétisme .....	68
2. Équations dites macroscopiques : Électromagnétisme dans les milieux continus .....	75
3. Potentiels. Transformation de jauge (cas de l'espace entier $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$ ) ..	91
4. Quelques problèmes d'évolution .....	94

5. Électromagnétisme statique .....	99
6. Problèmes stationnaires .....	103
<b>Bilan</b> .....	126
<b>§ 5. Neutronique. Équations du transport et de la diffusion</b> .....	128
1. Problèmes du transport des neutrons .....	128
2. Problèmes de diffusion des neutrons .....	132
3. Problèmes stationnaires .....	137
<b>Bilan</b> .....	142
<b>§ 6. Physique quantique</b> .....	144
Introduction .....	144
1. Les principes fondamentaux intervenant dans la modélisation .....	146
2. Systèmes constitués par une particule .....	160
3. Systèmes de plusieurs particules .....	172
<b>Bilan</b> .....	177
<b>Appendice. Éléments succincts concernant quelques notions mathématiques utilisées dans ce § 6.</b> .....	178
 <b>APPENDICE "MÉCANIQUE". — ÉLÉMENTS CONCERNANT LES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE</b> .....	183
 <b>§ 1. Calcul indiciel. Techniques élémentaires de calcul tensoriel</b> .....	183
1. Tenseur d'orientation ou tenseur alterné fondamental dans $\mathbb{R}^3$ .....	183
2. Possibilités de décompositions d'un tenseur du second ordre .....	185
3. Théorème de la divergence généralisée .....	186
4. Notions sur les torseurs .....	187
<b>§ 2. Notations, langage et conventions en mécanique</b> .....	189
1. Coordonnées de Lagrange et d'Euler .....	189
2. Notions de déplacement et de déformation .....	189
3. Notions de vitesse et de taux de déformation .....	191
4. Notions de dérivée particulaire, d'accélération et de dilatation .....	191
5. Notions de trajectoire et de ligne de courant .....	192
<b>§ 3. Notions sur le principe des puissances virtuelles</b> .....	194
1. Introduction : Schématisation des efforts .....	194
2. Définitions préliminaires .....	194
3. Énoncés fondamentaux .....	197
4. Théorie du premier gradient .....	198
5. Application à la formulation des milieux curvilignes .....	201
6. Application à la formulation des plaques minces .....	205
<b>Problèmes linéaires et non linéaires dans les § 1 à § 6 de ce chapitre I A</b> ..	210
 <b>PARTIE B. — PREMIER EXAMEN DES MODÈLES MATHÉMATIQUES</b> .....	213
 <b>§ 1. Les principaux types d'équations aux dérivées partielles linéaires vues au chapitre I.A.</b> .....	214
1. Équation du type de la diffusion .....	214
2. Équation du type des ondes .....	218

3. Équation de Schrödinger .....	220
4. Équation $Au = f$ où $A$ est un opérateur linéaire ne dépendant pas du temps et $f$ une donnée (équations stationnaires) .....	222
<b>§ 2. Contraintes globales imposées aux solutions d'un problème : Appartenance à un espace fonctionnel; conditions aux limites; conditions initiales</b> .....	226
1. Introduction. Espaces fonctionnels .....	226
2. Conditions initiales et problèmes d'évolution .....	227
3. Conditions aux limites .....	230
4. Conditions de transmission .....	240
5. Problèmes où interviennent des dérivées par rapport au temps de la fonction inconnue $u$ sur le bord .....	242
6. Problèmes de retards .....	244
<b>Bilan du chapitre I.B</b> .....	245
<b>Bibliographie du chapitre I</b> .....	247
 <b>CHAPITRE II. — L'OPÉRATEUR DE LAPLACE</b> .....	 255
<b>Introduction</b> .....	256
<b>§ 1. L'opérateur de Laplace</b> .....	257
1. Équation de Poisson .....	257
2. Exemples en mécanique et électrostatique .....	262
3. Formules de Green : Cadre classique .....	264
4. Le Laplacien en coordonnées polaires .....	269
<b>§ 2. Fonctions harmoniques</b> .....	276
1. Définition. Exemples. Solution élémentaire .....	276
2. Théorème de Gauss. Formules de la moyenne. Principe du maximum .....	284
3. Formule intégrale de Poisson; régularité des fonctions harmoniques; inégalité de Harnack .....	291
4. Caractérisation des fonctions harmoniques. Élimination des singularités .....	300
5. Transformation de Kelvin; application aux fonctions harmoniques dans un ouvert non borné; transformation conforme .....	311
6. Quelques interprétations physiques (en mécanique et électrostatique) .....	321
<b>§ 3. Potentiels newtoniens</b> .....	325
1. Généralités sur les potentiels newtoniens d'une distribution à support compact .....	325
2. Étude de la régularité locale des solutions de l'équation de Poisson .....	335
3. Régularité des potentiels de simple et double couche .....	349
4. Potentiel newtonien d'une distribution non à support compact .....	363
5. Quelques interprétations physiques (en mécanique et électrostatique) .....	384
<b>§ 4. Théorie classique du problème de Dirichlet</b> .....	387
1. Généralités sur le problème de Dirichlet $P(\Omega, \varphi)$ dans le cas $\Omega$ borné : Solution classique, exemples, exposé de la méthode de Perron, solutions généralisées, point régulier du bord, fonction barrière .....	387
2. Généralités sur le problème de Dirichlet $P(\Omega, \varphi, f)$ et la fonction de Green de $\Omega$ dans le cas d'un ouvert borné .....	401
3. Généralités sur le problème de Dirichlet dans un ouvert non borné .....	415
4. Le problème de Neumann: problème mixte; principe du maximum de Hopf; exemples .....	432

5. Résolution par potentiels de simple et double couche : Méthode intégrale de Fredholm .....	445
6. Fonctions sous-harmoniques. Méthode de Perron .....	464
<b>§ 5. Capacités *</b> .....	477
1. Opérateurs capacités intérieur et extérieur .....	477
2. Équilibre électrique : Coefficients d'influence .....	489
3. Capacité d'une partie dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .....	506
<b>§ 6. Régularité *</b> .....	534
1. Régularité des solutions des problèmes de Dirichlet et Neumann .....	534
2. Régularité analytique et trace au bord d'une fonction harmonique .....	550
3. Problème de Dirichlet avec données mesures ou fonctions discontinues. Théorème de Herglotz .....	564
4. Problème de Neumann avec données mesures .....	580
5. Dépendance des solutions des problèmes de Dirichlet en fonction de l'ouvert : Formule d'Hadamard .....	586
<b>§ 7. Autres méthodes de résolution du problème de Dirichlet *</b> .....	592
1. Cas d'un ouvert convexe : Méthode intégrale de Neumann .....	592
2. Procédé alterné de Schwarz .....	601
3. Méthode de séparation des variables. Polynômes harmoniques. Fonctions harmoniques sphériques .....	610
4. Méthode de Dirichlet .....	632
5. Méthodes de symétrie et méthode des images .....	652
<b>§ 8. Équations elliptiques du second ordre *</b> .....	662
1. Forme divergente, formule de Green .....	663
2. Différentes notions de solutions, problèmes aux limites, conditions de transmission .....	670
3. Résultats généraux de régularité des solutions de problèmes elliptiques du second ordre .....	681
4. Résultats d'existence et d'unicité de solutions de problèmes aux limites strictement elliptiques du second ordre sur un ouvert borné .....	691
5. Inégalité de Harnack et principe du maximum .....	706
6. Fonctions de Green .....	727
7. Équation de Helmholtz .....	745
<b>Bilan du chapitre II</b> .....	765
<b>Bibliographie du chapitre II</b> .....	766
<b>CHAPITRE III. — TRANSFORMATIONS FONCTIONNELLES</b> .....	771
<b>Introduction</b> .....	772
<b>PARTIE A. — QUELQUES TRANSFORMATIONS UTILES DANS LES APPLICATIONS</b> .....	775
<b>§ 1. Séries de Fourier et problème de Dirichlet</b> .....	775
1. Rappel sur les séries de Fourier .....	775
2. Rappel sur les distributions sur $\mathbb{T}$ et les distributions périodiques .....	779
3. Séries de Fourier de distributions .....	781

4. Séries de Fourier et transformations de Fourier .....	786
5. Convergence au sens de Cesaro .....	788
6. Résolution du problème de Dirichlet à l'aide des séries de Fourier ...	790
<b>§ 2. La transformation de Mellin .....</b>	<b>798</b>
1. Généralités .....	798
2. Définition de la transformation de Mellin .....	800
3. Propriétés de la transformation de Mellin .....	802
4. Transformation de Mellin inverse .....	804
5. Applications de la transformation de Mellin .....	805
6. Table de quelques transformées de Mellin .....	813
<b>§ 3. La transformation de Hankel .....</b>	<b>814</b>
1. Généralités .....	814
2. Introduction aux fonctions de Bessel .....	815
3. Définition de la transformation de Hankel .....	821
4. La formule d'inversion .....	822
5. Propriétés de la transformation de Hankel .....	825
6. Applications de la transformation de Hankel aux équations aux dérivées partielles .....	828
7. Table de quelques transformées de Hankel .....	832
<b>Bilan du chapitre III.A .....</b>	<b>833</b>
 <i>PARTIE B. — TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE ET TRANSFORMATIONS DE FOURIER RAPIDES.....</i>	 <b>835</b>
<b>§ 1. Introduction .....</b>	<b>835</b>
<b>§ 2. Accélération du produit d'une matrice par un vecteur .....</b>	<b>839</b>
<b>§ 3. La transformation de Fourier rapide de Cooley et Tukey .....</b>	<b>842</b>
<b>§ 4. Transformation de Fourier rapide de Good-Winograd .....</b>	<b>844</b>
<b>§ 5. Réduction du nombre de multiplications .....</b>	<b>847</b>
1. Relation entre la transformation de Fourier discrète et le problème de convolution cyclique .....	847
2. Complexité du produit de deux polynômes .....	849
3. Application à la convolution cyclique d'ordre 2 .....	851
4. Application à la convolution cyclique d'ordre 3 .....	851
5. Application à la convolution cyclique d'ordre 6 .....	854
<b>§ 6. Transformation de Fourier rapide en dimension deux .....</b>	<b>857</b>
<b>§ 7. Quelques applications de la transformation de Fourier rapide .....</b>	<b>859</b>
1. Résolution de problèmes aux limites .....	859
2. Régularisation ou lissage de fonctions .....	862
3. Calcul pratique de la transformée de Fourier d'un signal .....	863
4. Détermination du spectre de certains opérateurs de différences finies et solveurs rapides pour le Laplacien .....	865
<b>Bilan du chapitre III.B .....</b>	<b>873</b>
<b>Bibliographie du chapitre III .....</b>	<b>873</b>

<b>CHAPITRE IV. — ESPACES DE SOBOLEV</b> .....	877
<b>Introduction</b> .....	878
§ 1. <b>Espaces <math>H^1(\Omega)</math>, <math>H^m(\Omega)</math></b> .....	879
§ 2. <b>Espaces <math>H^s(\mathbb{R}^n)</math></b> .....	883
1. Définition et premières propriétés .....	883
2. Le dual topologique de $H^s(\mathbb{R}^n)$ .....	886
3. L'équation $(-\Delta + k^2)u = f$ dans $\mathbb{R}^n$ , $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .....	888
§ 3. <b>Théorème de plongement de Sobolev</b> .....	889
§ 4. <b>Théorèmes de densité et de trace pour les espaces <math>H^m(\Omega)</math> (<math>m \in \mathbb{N}^*</math>, <math>\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}</math>)</b> .....	892
1. Un théorème de densité .....	892
2. Un théorème de trace pour $H^1(\mathbb{R}_+^n)$ .....	897
3. Trace des espaces $H^m(\mathbb{R}_+^n)$ et $H^m(\Omega)$ .....	904
4. Propriétés de $m$ -prolongement .....	906
§ 5. <b>Les espaces <math>H^{-m}(\Omega)</math> pour tout <math>m \in \mathbb{N}</math></b> .....	913
§ 6. <b>Compacité</b> .....	917
§ 7. <b>Quelques inégalités dans les espaces de Sobolev</b> .....	920
1. Inégalité de Poincaré pour $H_0^1(\Omega)$ (resp. $H_0^m(\Omega)$ ) .....	920
2. L'inégalité de Poincaré pour $H^1(\Omega)$ .....	922
3. Inégalités de convexité pour $H^m(\Omega)$ .....	929
§ 8. <b>Compléments</b> .....	936
1. Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ .....	936
2. Espaces de Sobolev avec poids .....	938
<b>Bilan du chapitre IV</b> .....	940
<b>APPENDICE. LES ESPACES <math>H^s(\Gamma)</math>, AVEC <math>\Gamma</math> BORD « RÉGULIER » D'UN OUVERT <math>\Omega</math> DE <math>\mathbb{R}^n</math></b> .....	941
<b>Bibliographie du chapitre IV</b> .....	945
<b>CHAPITRE V. — OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES</b> .....	947
<b>Introduction</b> .....	948
§ 1. <b>Généralités sur les opérateurs différentiels linéaires</b> .....	949
1. Caractérisation des opérateurs différentiels linéaires .....	949
2. Définitions diverses .....	953
3. Opérateur différentiel linéaire sur une variété .....	956
4. Caractéristiques .....	958
5. Opérateurs à coefficients analytiques. Théorème de Cauchy-Kowalewsky et Holmgren .....	966
§ 2. <b>Opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants</b> .....	974
1. Étude d'un o.d.l. à coefficients constants par transformation de Fourier .....	975
2. Solutions élémentaires d'un o.d.l. à coefficients constants .....	988

3. Caractérisation des opérateurs hyperboliques .....	998
4. Opérateurs paraboliques .....	1009
<b>§ 3. Problème de Cauchy pour les opérateurs différentiels à coefficients constants</b> .....	1013
1. Problème de Cauchy et solution élémentaire dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ .....	1014
2. Propagation dans les problèmes de Cauchy hyperboliques .....	1018
3. Choix d'un espace fonctionnel : Problème de Cauchy bien posé .....	1023
4. Problème de Cauchy bien posé dans $\mathcal{S}'$ .....	1026
5. Opérateurs paraboliques et faiblement paraboliques .....	1030
6. Étude du cas particulier $P = \frac{\partial}{\partial t} + P_0$ .....	1033
7. Problème de Cauchy bien posé dans $\mathcal{D}'$ : Opérateur hyperbolique .....	1037
<b>§ 4. Régularité locale des solutions *</b> .....	1042
1. Caractérisation de l'hypo-ellipticité .....	1042
2. Analyticité des solutions .....	1046
3. Comparaison des opérateurs .....	1055
4. Régularité locale pour les opérateurs à coefficients variables de force constante .....	1058
5. Construction d'une solution élémentaire .....	1061
<b>§ 5. Principe du maximum *</b> .....	1065
1. Rappels .....	1065
2. Principe du maximum parabolique et dissipativité .....	1066
3. Caractérisation des opérateurs $P$ vérifiant des principes du maximum ..	1074
<b>Bilan du chapitre V</b> .....	1084
<b>Bibliographie du chapitre V</b> .....	1085
 <b>CHAPITRE VI. — OPÉRATEURS DANS LES ESPACES DE BANACH ET DANS LES ESPACES DE HILBERT</b> .....	1087
<b>Introduction</b> .....	1088
<b>§ 1. Quelques rappels d'analyse fonctionnelle. Espaces de Banach et de Hilbert</b> .....	1089
1. Espaces vectoriels topologiques localement convexes. Espaces normés et de Banach .....	1089
2. Opérateurs linéaires .....	1094
3. Dualité .....	1103
4. Le théorème de Hahn-Banach et ses applications .....	1104
5. Bidual. Réflexivité. Convergence faible. Compacité faible .....	1108
6. Espaces de Hilbert .....	1116
7. Notions sur les fonctions de variable réelle ou complexe à valeurs dans un espace de Banach .....	1130
<b>§ 2. Opérateurs linéaires dans les espaces de Banach</b> .....	1132
1. Généralités sur les opérateurs linéaires .....	1132
2. Espaces d'opérateurs bornés .....	1137
3. Opérateurs fermés .....	1165
<b>§ 3. Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert</b> .....	1183
1. Opérateurs bornés dans les espaces de Hilbert .....	1185
2. Opérateurs non bornés dans les espaces de Hilbert .....	1197
<b>Bilan du chapitre VI</b> .....	1213
<b>Bibliographie du chapitre VI</b> .....	1213

<b>CHAPITRE VII. — PROBLÈMES VARIATIONNELS LINÉAIRES. RÉGULARITÉ</b> .....	1215
<b>Introduction</b> .....	1216
<b>§ 1. Théorie variationnelle elliptique</b> .....	1217
1. Théorème de Lax-Milgram .....	1217
2. Premiers exemples .....	1220
3. Compléments dans le cas où $V$ et $H$ sont des espaces de distributions ou de fonctions .....	1225
4. Formes sesquilinéaires associées aux opérateurs elliptiques d'ordre deux ..	1226
5. Formes sesquilinéaires associées aux opérateurs elliptiques d'ordre $2m$ ..	1230
6. Divers .....	1232
7. Application à la résolution de problèmes elliptiques généraux (de type Dirichlet) .....	1235
<b>§ 2. Exemples de problèmes elliptiques du second ordre</b> .....	1238
1. Généralités .....	1238
2. Exemples de problèmes variationnels .....	1239
3. Problèmes relatifs à des formes intégral-différentielles sur $\Omega \times \Gamma$ .....	1243
4. Problème de transmission .....	1245
5. Divers .....	1249
6. Application : Équation multigroupe stationnaire de la diffusion des neutrons .....	1252
7. Application : Problèmes statiques d'élasticité .....	1256
8. Problèmes statiques de flexion de plaques .....	1266
<b>§ 3. Régularité des solutions de problèmes variationnels</b> .....	1271
1. Introduction .....	1271
2. Régularité intérieure .....	1272
3. Régularité globale des solutions de problèmes de Dirichlet et de Neumann pour des opérateurs elliptiques d'ordre deux .....	1280
4. Divers résultats de régularité globale .....	1284
5. Fonctions de Green .....	1289
<b>Bilan du chapitre VII</b> .....	1305
<b>Bibliographie du chapitre VII</b> .....	1305
<b>ANNEXE. — "DISTRIBUTIONS"</b> .....	1307
<b>§ 1. Définition et premières propriétés des distributions</b> .....	1308
1. Espace $\mathcal{D}(\Omega)$ .....	1308
2. Espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur $\Omega$ .....	1315
3. Quelques opérations élémentaires sur les distributions .....	1329
4. Quelques exemples .....	1335
<b>§ 2. Convolution des distributions</b> .....	1346
1. Convolution d'une distribution sur $\mathbb{R}^n$ et d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .....	1346
2. Convolution de deux distributions dont une (au moins) est à support compact .....	1348
3. Distributions à supports convolutifs .....	1350
4. Algèbres de convolution .....	1351
<b>§ 3. Transformation de Fourier</b> .....	1356
1. Transformation de Fourier des fonctions de $L^1$ .....	1356



2. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .....	1358
3. Transformation de Fourier dans $L^2$ .....	1362
4. Transformation de Fourier des distributions tempérées .....	1363
5. Transformation de Fourier des distributions à support compact .....	1366
6. Exemples de calcul de transformées de Fourier .....	1367
7. Transformation de Fourier partielle .....	1370
8. Transformation de Fourier et automorphismes de $\mathbb{R}^n$ . Distributions homogènes .....	1375
9. Transformation de Fourier et convolution. Espaces $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{O}'_c(\mathbb{R}^n)$ ..	1378
10. Transformation de Fourier des mesures tempérées .....	1381
11. Distribution $\gg 0$ (de type positif). Théorème de Bochner .....	1383
12. Le théorème des noyaux de L. Schwartz .....	1386
13. Quelques distributions et leurs transformées de Fourier .....	1390
<b>Bibliographie de l'Annexe "Distributions"</b> .....	1392
<b>TABLE DES NOTATIONS</b> .....	1393
<b>INDEX</b> .....	1405