

Inhalt

Vektoranalysis (F. Wille)

1 Kurven

1.1 Wege, Kurven, Bogenlängen	1
1.1.1 Einführung: Ebene Kurven	1
1.1.2 Kurven im \mathbb{R}^n	6
1.1.3 Glatte und stückweise glatte Kurven	11
1.1.4 Bogenlänge	13
1.1.5 Parametertransformation, Orientierung	19
1.2 Theorie ebener Kurven	24
1.2.1 Bogenlänge und umschlossene Fläche	24
1.2.2 Krümmung und Krümmungsradius	28
1.2.3 Tangenteneinheitsvektor, Normalenvektor, natürliche Gleichung	32
1.2.4 Evolute und Evolvente	35
1.3 Beispiele ebener Kurven I: Kegelschnitte	39
1.3.1 Kreis	39
1.3.2 Ellipse	42
1.3.3 Hyperbel	46
1.3.4 Parabel	50
1.3.5 Allgemeine Kegelschnittgleichung, Hauptachsentransformation	55
1.4 Beispiele ebener Kurven II: Rollkurven, Blätter, Spiralen	62
1.4.1 Zykloiden	62
1.4.2 Epizykloiden	63
1.4.3 Anwendung: Wankelmotor	66
1.4.4 Hypozykloide	69
1.4.5 Blattartige Kurven	71
1.4.6 Kurbelgetriebe	75
1.4.7 Spiralen	76
1.5 Theorie räumlicher Kurven	81
1.5.1 Krümmung, Torsion und begleitendes Dreibein	81
1.5.2 Berechnung von Krümmung, Torsion und Dreibein in beliebiger Parameterdarstellung	85
1.5.3 Natürliche Gleichungen und Frenétsche Formeln	89

1.6 Vektorfelder, Potentiale, Kurvenintegrale	92
1.6.1 Vektorfelder und Skalarfelder	92
1.6.2 Kurvenintegrale	95
1.6.3 Der Kurvenhauptsatz	100
1.6.4 Potentialkriterium	103
1.6.5 Berechnung von Potentialen	107
1.6.6 Beweis des Potentialkriteriums	112

2 Flächen

2.1 Flächenstücke und Flächen	115
2.1.1 Flächenstücke	115
2.1.2 Tangentenebenen, Normalenvektoren	118
2.1.3 Parametertransformation, Orientierung	121
2.1.4 Flächen	124
2.2 Flächenintegrale	125
2.2.1 Flächeninhalt	125
2.2.2 Flächenintegrale erster und zweiter Art	128
2.2.3 Transformationsformel für Flächenintegrale zweiter Art	132

3 Integralsätze

3.1 Der Gaußsche Integralsatz	134
3.1.1 Ergiebigkeit, Divergenz	135
3.1.2 Der Gaußsche Integralsatz für Bereiche mit stückweise glattem Rand	139
3.1.3 Die Kettenregel der Divergenz	142
3.1.4 Beweis des Gaußschen Integralsatzes für Bereiche mit stückweise glattem Rand	144
3.1.5 Gaußscher und Greenscher Integralsatz in der Ebene	147
3.1.6 Der Gaußsche Integralsatz für Skalarfelder	150
3.2 Der Stokessche Integralsatz	153
3.2.1 Einfache Flächenstücke	153
3.2.2 Zirkulation, Wirbelstärke, Rotation	154
3.2.3 Idee des Stokesschen Integralsatzes	159
3.2.4 Stokesscher Integralsatz im dreidimensionalen Raum	161
3.2.5 Zirkulation und Stokesscher Satz in der Ebene	164
3.3 Weitere Differential- und Integralformeln	166
3.3.1 Nabla-Operator	166
3.3.2 Formeln über Zusammensetzungen mit grad, div und rot	167

3.3.3	Gaußscher und Stokesscher Satz in div-, grad-, rot- und Nabla-Form	168
3.3.4	Partielle Integration	171
3.3.5	Die beiden Greenschen Integralformeln	172
3.3.6	Krummlinige orthogonale Koordinaten	173
3.3.7	Die Differentialoperatoren grad, div, rot, Δ in krummlinigen orthogonalen Koordinaten	178
3.4	Wirbelfreiheit, Quellfreiheit, Potentiale	182
3.4.1	Wirbelfreiheit: rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, skalare Potentiale	182
3.4.2	Laplace-Gleichung, harmonische Funktionen	183
3.4.3	Poissongleichung	186
3.4.4	Quellenfreiheit: div $\mathbf{V} = 0$, Vektorpotentiale	189
3.4.5	Quellfreie Vektorpotentiale	193
3.4.6	Helmholtzscher Zerlegungssatz	195
4	Alternierende Differentialformen	
4.1	Alternierende Differentialformen im \mathbb{R}^3	197
4.1.1	Integralsätze in Komponentenschreibweise	197
4.1.2	Differentialformen und totale Differentiale	200
4.1.3	Rechenregeln für Differentialformen	202
4.1.4	Integration von Differentialformen, Integralsätze	206
4.2	Alternierende Differentialformen im \mathbb{R}^n	209
4.2.1	Definition, Rechenregeln	209
4.2.2	Integrale über p-dimensionalen Flächen	211
4.2.3	Transformationsformel für Integrale	212
4.2.4	Der allgemeine Stokessche Satz	214
5	Kartesische Tensoren	
5.1	Tensoralgebra	216
5.1.1	Motivation: Spannungstensor	217
5.1.2	Definition kartesischer Tensoren	218
5.1.3	Rechenregeln für Tensoren	225
5.1.4	Invariante Tensoren	229
5.1.5	Diagonalisierung symmetrischer Tensoren und das Tensor-ellipsoid	233
5.2	Tensoranalysis	237
5.2.1	Differenzierbare Tensorfelder, Fundamentalsatz der Feldtheorie	237

5.2.2	Zusammenhang zwischen Tensorgradienten und grad , div , rot , Δ	239
5.2.3	Der Gaußsche Satz für Tensorfelder zweiter Stufe	241
5.2.4	Anwendungen	243

Funktionentheorie (H. Haf)

6 Grundlagen

6.1	Komplexe Zahlen	249
6.1.1	Wiederholung und Ergänzung	249
6.1.2	Die Riemannsche Zahlenkugel	255
6.1.3	Topologische Hilfsmittel	257
6.1.4	Folgen von komplexen Zahlen	260
6.1.5	Reihen von komplexen Zahlen	264
6.1.6	Kurven und Gebiete in \mathbb{C}	266
6.2	Funktionen einer komplexen Variablen	275
6.2.1	Funktionsbegriff	275
6.2.2	Stetigkeit	276
6.2.3	Elementare Funktionen	279

7 Holomorphe Funktionen

7.1	Differenzierbarkeit im Komplexen, Holomorphie	288
7.1.1	Ableitungsbegriff, Holomorphie	288
7.1.2	Rechenregeln für holomorphe Funktionen	291
7.1.3	Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	292
7.1.4	Umkehrung der elementaren Funktionen	300
7.1.5	Die Potentialgleichung	308
7.2	Komplexe Integration	315
7.2.1	Integralbegriff	315
7.2.2	Der Cauchysche Integralsatz	321
7.2.3	Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz	324
7.2.4	Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes	337
7.2.5	Anwendungen der komplexen Integralrechnung	338
7.3	Erzeugung holomorpher Funktionen durch Grenzprozesse	353
7.3.1	Folgen von Funktionen	353
7.3.2	Reihen von Funktionen	358
7.3.3	Potenzreihen	359

7.3.4	Charakterisierung holomorpher Funktionen	365
7.3.5	Analytische Fortsetzung	366
7.4	Asymptotische Abschätzungen	379
7.4.1	Asymptotische Entwicklungen	379
7.4.2	Die Sattelpunktmethode	384
8	Isolierte Singularitäten, Laurententwicklung	
8.1	Laurentreihen	392
8.1.1	Holomorphe Funktionen in Ringgebieten	392
8.1.2	Singularitäten	398
8.2	Residuensatz und Anwendungen	405
8.2.1	Der Residuensatz	405
8.2.2	Das Prinzip vom Argument	409
8.2.3	Anwendungen: (a) Berechnung von reellen uneigentlichen Integralen	411
	(b) Die Eulersche Gammafunktion	420
9	Konforme Abbildungen	
9.1	Einführung in die Theorie konformer Abbildungen	430
9.1.1	Geometrische Kennzeichnung holomorpher Funktionen	430
9.1.2	Der Riemannsche Abbildungssatz	435
9.1.3	Spezielle konforme Abbildungen	437
9.2	Anwendungen auf die Potentialtheorie	464
9.2.1	Dirichletsche Randwertprobleme	464
9.2.2	Neumannsche Randwertprobleme	468
9.2.3	Potential von Punktladungen	471
9.2.4	Ebene stationäre Strömungen	476
10	Anwendungen der Funktionentheorie auf die Besselsche Differentialgleichung	
10.1	Die Besselsche Differentialgleichung	488
10.1.1	Motivierung	488
10.1.2	Die Hankelschen Funktionen	490
10.1.3	Allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung	496

10.2 Die Besselschen und Neumannschen Funktionen	499
10.2.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften	499
10.2.2 Integraldarstellungen der Besselschen Funktionen	503
10.2.3 Reihenentwicklung und asymptotisches Verhalten der Besselschen Funktionen	505
10.2.4 Orthogonalität und Nullstellen der Besselschen Funktionen	509
10.2.5 Die Neumannschen Funktionen	513
10.2.6 Verhalten der Lösung der Besselschen Differentialgleichung	517
10.3 Anwendungen	518
10.3.1 Radialsymmetrische Lösungen der Schwingungsgleichung	518
10.3.2 Schwingungen einer Membran	521
Anhang	528
Lösungen zu den Übungen¹⁾	531
Symbole	549
Literatur	552
Sachverzeichnis	558

¹⁾ Zu den mit * versehenen Übungen werden Lösungen angegeben oder Lösungswege skizziert