

# INHALTSVERZEICHNIS

## KAPITEL 1. PROJEKTIVER RAUM ÜBER EINEM VEKTORRAUM

1A. Begriff des projektiven Raumes . . . . .	1
1B. $k$ -Ebenen . . . . .	4
1C. Dimensionsformel und Folgerungen . . . . .	10
1D. Projektive Koordinaten . . . . .	11
1E. Koordinatendarstellungen der $k$ -Ebenen. . . . .	16

## KAPITEL 2. PROJEKTIVE ABBILDUNGEN, KOLLINEATIONEN

2A. Begriff der projektiven Abbildung. . . . .	20
2B. Eigenschaften projektiver Abbildungen. . . . .	23
2C. Koordinatendarstellungen projektiver Abbildungen . .	27
2D. Projektivitäten, projektive Gruppe . . . . .	31
2E. Kollineationen . . . . .	37

## KAPITEL 3. DUALITÄTSPRINZIP, KORRELATIONEN

3A. Dualitätssprinzip der projektiven Räume . . . . .	42
3B. Koordinatendarstellungen des Dualitätssprinzips . . .	46
3C. Korrelationen. . . . .	51

## KAPITEL 4. QUADRIKEN

4A. Begriff der Quadrik. . . . .	52
4B. Koordinatendarstellungen der Quadriken . . . . .	54
4C. Klassifikation der Quadriken, Normalformen, Quadrikinvarianten . . . . .	55
4D. $k$ -Ebenen und Quadriken . . . . .	65
4E. Polarentheorie der Quadriken . . . . .	72
4F. Weitere Quadrikeneigenschaften . . . . .	80
4G. Quadriken mit Außen- und Innengebiet . . . . .	91
4H. Dualisierung der Quadriken . . . . .	95

## KAPITEL 5. GEOMETRIE ALS INVARIANTENTHEORIE EINER GRUPPE

5A. Geometrie-Modelle und ihre Transformationsgruppen. .	101
5B. Absolutfigur, Schauplatz, Ordnungsprinzip. . . . .	103
5C. Übertragungen, Geometrien. . . . .	106

## KAPITEL 6. CAYLEY/KLEIN-RÄUME

6A. Begriff des Cayley/Klein-Raumes. . . . .	110
6B. Koordinatendarstellungen der Absolutfiguren. . . . .	113

6C. Entartete und nichtentartete Cayley/Klein-Räume. . . . .	116
6D. In $k$ -Ebenen induzierte Cayley/Klein-Räume. . . . .	121
6E. Dualisierung der Absolutfiguren. . . . .	129
6F. Dreidimensionale Cayley/Klein-Räume. . . . .	135
6G. Cayley/Klein-Ebenen. . . . .	137
6H. Polsimplexe der Absolutfiguren . . . . .	139
<b>KAPITEL 7. ÄHNLICHKEITEN UND BEWEGUNGEN AUF CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN</b>	
7A. $F$ -Projektivitäten, Ähnlichkeits- und Bewegungs- invarianten. . . . .	146
7B. Ähnlichkeiten und Bewegungen mit Fixpunkten. . . . .	154
7C. Ähnlichkeits- und Bewegungsgruppen . . . . .	156
7D. Projektivspiegelungen, Streckungen . . . . .	161
7E. Ergänzungen. . . . . (1.Hyperbolische Räume 163, 2.Semieuklidische Räume 165)	163
<b>KAPITEL 8. ABSTANDS- UND WINKELMETRIKEN IN CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN</b>	
8A. Geraden und Absolutfiguren . . . . .	166
8B. Abstands- und Winkelmetriken . . . . .	169
8C. Ergänzungen. . . . . (1.Hyperbolische Räume 183, 2.Elliptische Räume 184, 3.Eukli- dische und pseudoeklidische Räume 184, 4.Isotrope Räume 188)	183
8D. Strecken und Sektoren. . . . .	189
<b>KAPITEL 9. <math>k</math>-EBENEN IN CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN</b>	
9A. $k$ -Ebenen und Absolutebenen . . . . .	194
9B. Totalpolare einer regulären $k$ -Ebene. . . . .	196
9C. Koordinatendarstellungen der Totalpolaren einer regulären $k$ -Ebene. . . . .	198
9D. Orthogonalität in Cayley/Klein-Räumen. . . . .	201
9E. Ergänzungen. . . . . (1.Hyperbolische Räume 209, 2.Elliptische Räume 210, 3.Quasi- hyperbolische und quasielliptische Räume 211, 4.Euklidische und pseudoeklidische Räume 212)	209
<b>KAPITEL 10. PROJEKTIVE NICHTSTANDARDMODELLE VON CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN</b>	
10A. Bündelmodelle. . . . .	216
10B. Gegenpunktmodelle auf Ovalquadriken, duale Modelle . . . . .	218
10C. Geraden-Modell der hyperbolischen Ebene. . . . .	219
10D. Geraden-Modell des hyperbolischen Raumes $P_{13}^5$ . . . . .	223
10E. Matrizen-Modell des hyperbolischen Raumes $P_{12}^3$ . . . . .	234

## KAPITEL 11. KINEMATISCHE MODELLE VON CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN

11A. Kinematisches Modell des elliptischen Raumes $P_{10}^3$ . . .	236
11B. Kinematisches Modell des hyperbolischen Raumes $P_{14}^7$ . . .	240
11C. Kinematisches Modell des quasielliptischen Raumes $P_{2100}^3$	244

## KAPITEL 12. CLIFFORD-PARALLELITÄT IN ELLIPTISCHEN RÄUMEN

12A. Historische Motivation . . . . .	253
12B. Vorbereitungen . . . . .	257
12C. Erzeugendenscharen der Absolutquadrik. . . . .	261
12D. $(1,q-1)$ -Reguli, Clifford-parallele $(q-1)$ -Ebenen. . . . .	264
12E. Clifford-Reguli. . . . .	269
12F. Zur Transitivität der Clifford-Parallelität. . . . .	273

## KAPITEL 13. LORENTZ-RAUM UND SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

13A. Galilei-Transformationen und Galilei-Raum $P_{111000}^4$ . . .	276
13B. Lichtausbreitung . . . . .	278
13C. Minkowski-Welt, Lorentz-Transformationen . . . . .	279
13D. Minkowski-Welt und Lorentz-Raum $P_{1101}^4$ . . . . .	282
13E. Spezielle Lorentz-Transformationen . . . . .	284

## KAPITEL 14. CAYLEY/KLEIN-GEOMETRIEN IN NICHTENTARTETEN CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN

14A. Vorbemerkungen über Cayley/Klein-Geometrien. . . . .	288
14B. Hyperbolische Geometrie. . . . . (1.Grundbegriffe 290, 2.Parallelkegel 296, 3.Fundamentalflächen 299, 4.Kongruenzsätze 303, 5.Trigonometrie 306, 6.Blick in die Literatur 307)	290
14C. Möbius-Geometrie . . . . . (1.Grundbegriffe 311, 2.Orthogonalität 315, 3.Möbius-Bündel 315, 4.Blick in die Literatur 316)	311
14D. Elliptische Geometrie. . . . . (1.Grundbegriffe 316, 2.Orthogonalität 318, 3.Dualitätsprinzip 320, 4.Blick in die Literatur 321)	316
14E. Projektive Liniengeometrie, Plücker-Geometrie. . . . . (1.Grundbegriffe 323, 2.Blick in die Literatur 325)	323
14F. Lie-Geometrie. . . . . (1.Grundbegriffe 326, 2.Blick in die Literatur 326)	326

## KAPITEL 15. CAYLEY/KLEIN-GEOMETRIEN IN ENTARTETEN CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN

15A. Laguerre-Geometrien. . . . . (1.Grundbegriffe 327, 2.Blick in die Literatur 330)	327
15B. Quasielliptische Geometrien. . . . . (1.Grundbegriffe 331, 2.Blick in die Literatur 333)	330
15C. Euklidische und pseudoeuklidische Geometrien, iso-	

trope Geometrien, Galilei- und Flaggen-Geometrien . . . 333  
 (1.Grundbegriffe 333, 2.Blick in die Literatur 334)

## KAPITEL 16. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN CAYLEY/KLEIN-GEOMETRIEN

- 16A. Bewegungsgruppe  $B_{|q_0-1}^n$  als Faktorgruppe der Bewegungsgruppe  $B_{|q_0}^{n+1}$  . . . . . 336
- 16B. Bewegungsgruppe  $B_{|q_0}^n$  als Faktorgruppe der Bewegungsgruppe  $B_{|q_0}^{n+1}$  . . . . . 339
- 16C. Bewegungsgruppe  $B_{|q_0-10}^n$  als Untergruppe der Bewegungsgruppe  $B_{|q_0}^{n+1}$  . . . . . 342

## KAPITEL 17. NICHTSTANDARDMODELLE DER CAYLEY/KLEIN-GEOMETRIEN

- 17A. Projektive Nichtstandardmodelle. . . . . 346  
 (1.Involutionen-Modell der ebenen hyperbolischen Geometrie 346, 2.Gegenpunktmodell der Möbius-Geometrie 349)
- 17B. Modelle von Cayley/Klein-Geometrien in Cayley/Klein-Räumen . . . . . 350  
 (1.Modelle der hyperbolischen Geometrie im euklidischen Raum 350, 2.Modelle der Möbius-Geometrie im euklidischen Raum 358, 3. Modelle der elliptischen Geometrie im euklidischen Raum 358, 4. Modelle der Laguerre-Geometrien im euklidischen Raum 360, 5. Modelle der quasielliptischen Geometrien im euklidischen Raum 369, 6. Modelle der Galilei-Geometrien im zugeordneten pseudo-euklidischen Raum 370)

## KAPITEL 18. STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION

- 18A. Begriff der stereographischen Projektion . . . . . 372
- 18B. Koordinatendarstellungen . . . . . 375
- 18C. Stereographische Projektion der Sphären. . . . . 379
- 18D. Ergänzungen im  $P^2$  und  $P^3$  . . . . . 383

## KAPITEL 19. INVERSION

- 19A. Begriff der Inversion, Koordinatendarstellung. . . . . 390
- 19B. Eigenschaften der Inversion. . . . . 392
- 19C. Kugelbündel. . . . . 396

## KAPITEL 20. KONFORME NICHTSTANDARDMODELLE

- 20A. Konforme Modelle der hyperbolischen Geometrie. . . . . 398  
 (1.Poincaré-Modell 398, 2.Varianten des Poincaré-Modells 401, 3.Anwendungen 407)
- 20B. Konformes Modell der Möbius-Geometrie. . . . . 408  
 (1.Grundbegriffe 408, 2.Orthogonalität 412, 3.Anwendung 413)
- 20C. Konformes Modell der elliptischen Geometrie. . . . . 414
- 20D. Konformes Modell der Lie-Geometrie . . . . . 419
- 20E. Konforme Modelle der Laguerre-Geometrien . . . . . 425

## KAPITEL 21. LOKALE KURVENTHEORIE IN CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN

21A. Kurvenbegriff, Schmiege-k-Ebenen. . . . .	431
21B. Begleitsimplex der Hauptkurven . . . . .	435
21C. Invariante Parametrisierung der Hauptkurven. . . . .	438
21D. Ableitungsgleichungen. . . . .	443
21E. Ergänzungen. . . . .	452
(1.Hyperbolische Räume 452, 2.Elliptische Räume 453, 3.Quasi-hyperbolische und quasielliptische Räume 453, 4.Euklidische und pseudoeklidische Räume 455, 5.Flaggenräume 455)	

## KAPITEL 22. LOKALE HYPERFLÄCHENTHEORIE IN CAYLEY/KLEIN-RÄUMEN

22A. Hyperflächenbegriff. . . . .	457
22B. Flächenkurven, Tangentenhyperebenen. . . . .	461
22C. Hauptflächen . . . . .	465
22D. Abstandsmetrik der Hauptflächen, erste Grundformen. .	471
22E. Begleitsimplex der Hauptflächen. . . . .	479
22F. Ergänzungen. . . . .	483
(1.Hyperbolische Räume 483, 2.Elliptische Räume 484, 3.Quasi-elliptische Räume, 4.Euklidische und pseudoeklidische Räume 485, 5.Isotrope Räume 485, 6.Flaggenräume)	
22G. Ableitungsgleichungen der Hauptflächen . . . . .	486
22H. Zweite Grundform der Hauptflächen. . . . .	497
22I. Winkelmetrik der Hauptflächen, dritte Grundformen. .	505
22J. Oberfläche einer Hauptfläche, Betrag der Gauß-Krümmung . . . . .	509
22K. Ergänzungen. . . . .	514
(1.Nichtentartete Cayley/Klein-Räume 514, 2.Euklidische Räume 515)	
22L. Normalkrümmung, Meusnier-Formeln . . . . .	517

## KAPITEL 23. BLICK IN DIE DIFFERENTIALGEOMETRISCHE LITERATUR

23A. Nichtentartete Cayley/Klein-Räume. . . . .	526
23B. Einfach entartete Cayley/Klein-Räume . . . . .	532
23C. Mehrfach entartete Cayley/Klein-Räume. . . . .	534
23D. Anwendungen der Cayley/Klein-Räume . . . . .	535

LITERATURVERZEICHNIS. . . . .	538
-------------------------------	-----

SACHVERZEICHNIS . . . . .	593
---------------------------	-----