

INHALTSVERZEICHNIS

<u>§ 1. Einleitung und Grundbegriffe</u>	1
1.1. Mengen	4
1.2. Abzählbare Mengen (Bemerkungen zum Auswahlaxiom und zur Kontinuumshypothese)	6
1.3. Geordnete Mengen; der Hausdorffsche Maximalitätssatz und der Wohlordnungssatz (Anwendungen, z.B. auf die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$; Hamelbasis)	11
<u>§ 2. Topologische Räume</u>	18
2.1. Umgebungen (Begriff des metrischen und topologischen Raumes; "klassische" Beispiele)	18
2.2. Offene Mengen (Teilräume; Sphären; Basen; endliche Produkte; Ordnungstopologie; Abzählbarkeitsaxiome)	21
2.3. Abgeschlossene Mengen (Abschlußoperator; Berührungspunkte; Häufungspunkte; isolierte Punkte)	25
2.4. Dichte Mengen (Separabilität)	27
2.5*. Vertiefende Beispiele topologischer Räume (endliche Räume; ein abzählbarer Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt; G_δ -Punkte und G_δ -Mengen; Sorgenfrey-Gerade und -Ebene; offen-abgeschlossene Mengen; nulldimensionale Räume; lexikographische Ordnung)	29
2.6. Stetigkeit (Beispiele und verschiedene Zugänge sowie Charakterisierungen; Projektionsabbildung und endliche Produkte; schwache Topologien; die S^1 als Quotientenraum; Quotientenabbildungen und -räume) .	31
2.7*. Vertiefende Aufgaben (topologische Gruppen und Vektorräume)	37
2.8. Homöomorphismen (lokal-euklidische Räume; Tori; Beispiel und Bemerkungen zur Dimensions- und Gebietsstreue im \mathbb{R}^n)	38
2.9*. Ordinal- und Kardinalzahlen (die Räume $[0, \Omega)$ und $[0, \Omega]$: ein erster Ausblick auf die Notwendigkeit, das Konzept der metrischen Räume in einen allgemeineren Rahmen zu stellen ("Notwendigkeit" topologischer Räume); ein erster Ausblick auf Überdeckungseigenschaften und Metrisierbarkeit; die (allgemeine) Kontinuumshypothese; $ R , C(R) $; die Ordinalzahlen ω_μ , die Kardinalzahlen \aleph_μ)	41

<u>§ 3. Metrische Räume</u>	46
3.1. Beispiele und einfache Eigenschaften (separable metrische Räume)	46
3.2. Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen (Hausdorff-Räume; normale Räume)	51
3.3. Vollständigkeit metrischer Räume (Topologie der gleichmäßigen Konvergenz); die Räume $C^*(X)$ und $C(X)$	53
3.4. Vertiefende Bemerkungen und Beispiele (u.a.: Banachscher Fixpunktsatz und eine Anwendung auf Integralgleichungen)	57
3.5. Der Satz von Baire (nirgendsdichte Mengen; magere Mengen; Mengen erster und zweiter Kategorie; der Satz von Baire für vollständig metrisierbare Räume)	59
3.6. Einige typische Anwendungsbeispiele aus der Topologie und der Reellen Analysis (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit; eine stetige reelle Funktion, die nirgends differenzierbar ist)	63
3.7. Das Cantorsche Diskontinuum	66
3.8. Kompaktheit (kompakte metrische Räume; einfachste Eigenschaften und Bedeutung kompakter Hausdorff-Räume; Lebesgue-Zahl; gleichmäßig stetige reelle Funktionen)	67
3.9. Die Topologie der punktweisen Konvergenz. (Unendliche Produkte; Bemerkungen zum Produktverhalten topologischer Eigenschaften; die Michael-Gerade; die Nicht-Metrisierbarkeit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$)	74
<u>§ 4. Vollständig reguläre Räume, Pseudometriken</u> (<u>Uniforme Räume, erster Teil</u>)	82
4.1. Systeme von Pseudometriken, uniforme Räume (Beispiele; Produkte metrischer Räume)	82
4.2. Netze (Moore-Smith Folgen); (Häufungspunkte; Grenzwerte; das Hausdorffsche Trennungaxiom; Riemannintegrierbare Funktionen auf $[a, b]$; "es gibt keine Topologie der Konvergenz fast überall"; eine Bemerkung über "topologische Strukturen"; siehe auch Schlußbemerkung und § 8)	85
4.3. Universelle Netze (Existenz ultrafeiner Netze; Filter; Ultrafilter)	90
4.4*. Eine Anwendung aus der Non-standard Analysis (unendlich kleine und unendlich große Zahlen; das Non-Standard Modell \mathbb{R}^* ; Bemerkungen zum Infinitesimalen-Kalkül)	93
4.5. Trennungseigenschaften (Begriffsbildungen und Beispiele)	95

4.6. Vollständig reguläre Räume: eine topologische Charakterisierung uniformer Räume (Z-Mengen, eine Charakterisierung der Stetigkeit mittels konvergenter Netze)	98
4.7. Das Lemma von Urysohn (eine Charakterisierung normaler Räume)	103
4.8. Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen, der Satz von Tietze-Urysohn (und ein Ausblick auf wichtige Anwendungen dieses Satzes)	105
<u>§ 5. Kompakte Räume</u>	108
5.1. Grundlegende Eigenschaften und der Satz von Tychoff. (Die Rolle des Auswahlaxioms; Der Satz von Dini)	108
5.2. Produkte $\prod R_i$ und $\prod [0,1]_i$ und deren Teilräume (Einbettungs- und Metrisierungssätze. Peano-Kurven)	114
5.3. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung (Konstruktion und einige Anwendungen in der Topologie und Analysis; Bemerkungen über verschiedene Zugänge und Konstruktionsmöglichkeiten; der kategorientheoretische Aspekt; $\beta\mathbb{N}$, $\beta(0,1)$, $\beta(\mathbb{R})$, eine Anwendung auf \mathbb{R}^*) ..	118
5.4. Lokalkompakte Räume (Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung und Anwendungen in der Analysis; lokalkompakte Hausdorff-Räume sind Bairesche Räume)	126
5.5. Mannigfaltigkeiten, Partition der Eins und parakompakte Räume (Einbettung kompakter endlichdimensionaler Mannigfaltigkeiten in einen passenden \mathbb{R}^n ; parakompakte Räume - ein kurzer Ausblick auf die Metrisierungstheorie; Dimension; topologische Summen)	130
5.6. Der Satz von Stone-Weierstraß (Reelle und komplexe Version für kompakte Räume X und Anwendungen - z.B. trigonometrische Polynome)	137
5.7*. Der Satz von Stone-Weierstraß für nicht-kompakte Räume X; die kompakt-offene Topologie (verschiedene Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Satzes von Stone-Weierstraß; Approximation stetiger Funktionen auf $[0, \infty)$; die Topologie der kompakten Konvergenz, die kompakt-offene Topologie und ihre Rolle für allgemeine Funktionenräume; Kelley-Räume) ..	141
5.8*. Der Satz von Ascoli-Arzelà (gleichgradige Stetigkeit; Kelley-Räume)	146
<u>§ 6. Zusammenhängende Räume</u>	150
6.1. Zusammenhängende Räume, wegzusammenhängende Räume, unzusammenhängende Räume, (speziell für Teilmengen des \mathbb{R}^n und Anwendungen in der Analysis)	150

<u>§ 7. Homotopie und Fragen der Topologie des \mathbb{R}^n</u>	155
7.1. Wege und Homotopie von Wegen, Fundamentalgruppe ...	155
7.2. Homotopie stetiger Abbildungen (relative Homotopie; Homotopieäquivalenz; einfach zusammenhängende Räume; der funktorielle Gesichtspunkt)	158
7.3. Die Fundamentalgruppe der S^1 (Hochheben von Wegen und Homotopien; Windungszahl; Begriff der Faserung; Dualität "Liften-Fortsetzen" stetiger Abbildungen)	162
7.4*. Vertiefende Bemerkungen (Abbildungsgrad für Funktionen $f: S^1 \rightarrow S^1$ und allgemeine Bemerkungen hierzu; Berechnung spezieller Fundamentalgruppen; ein Spezialfall des Satzes von Seifert-van Kampen; die $S^n (n \geq 2)$ ist einfach zusammenhängend)	165
7.5. Der Brouwersche Fixpunktsatz im \mathbb{R}^2 und Plausibilitätsbetrachtungen für seine Gültigkeit im \mathbb{R}^n , Anwendungen	168
7.6. Homotopie und stetige Fortsetzung stetiger Funktionen, der Fundamentalsatz der Algebra (Äquivalente Formulierungen und Zugänge zum Brouwerschen Fixpunktsatz; antipodentreue Abbildungen; der Satz von Borsuk-Ulam; die Nicht-Homöomorphie von \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n für $n \neq m$; stetige Vektorfelder (eine Einführung))	170
7.7*. Überlagerungen (Weitere Beispiele von Fundamentalgruppen; die projektive Ebene; Begriff der Faserung; Begriff des universellen Überlagerungsraumes)	170
7.8*. Höhere Homotopiegruppen (Verschiedene Zugänge; das topologische Exponentialgesetz)	183
<u>§ 8*. Uniforme Räume (2. Teil)</u>	192
8.1. Verschiedene Zugänge zur Theorie der uniformen Räume, Pseudometriken, Weil-Strukturen (Entourages), uniforme Überdeckungen; Metrisierbarkeit uniformer Räume; gleichmäßig stetige Abbildungen	192
8.2. Die Topologie uniformer Räume Uniforme Struktur kompakter Räume; uniforme Struktur parakompakter Räume; uniforme Strukturen topologischer Gruppen; uniforme Struktur der wichtigsten Funktionenräume	202
8.3. Produkte und Teilräume uniformer Räume Produktuniformität und Produkttopologie; Einbettung uniformer Räume in Produkte metrischer Räume	208
8.4. Vollständige uniforme Räume Cauchy-Netze; Vollständigkeit; Produkte und Teilräume vollständiger Räume; Vervollständigung uniformer Räume; Bemerkungen über den kategorientheoretischen Hintergrund; präkompakte (totalbeschränkte) uniforme Räume; Kompaktifizierungen, die Stone-Čech-Kompaktifizierung βX als Vervollständigung der von $C^*(X)$ auf X induzierten uniformen Struktur; reellkompakte Räume	210

8.5. Eine Bemerkung über Filter und Netze Cauchy-Filter; Bemerkungen über die Äquivalenz zwischen Filtern und Netzen; Vorteile der Filter; \mathfrak{P} -Filter; z -Filter; Konstruktion der Stone-Čech- Kompaktifizierung βX als geeignet toplogisierte Menge aller z -Ultrafilter auf X ; eine Bemerkung über Wallman-Kompaktifizierungen	220
Schlußbemerkung	224
Anhang	228
Literaturverzeichnis	230
Register	236