

SOMMAIRE

PRÉFACE	11
ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS	14
CHAPITRE PREMIER / <i>Le corps des réels</i>	15
Introduction	15
1 / Développements décimaux illimités	16
2 / L'ordre lexicographique sur \mathfrak{D}	18
Le théorème de la borne supérieure	19
3 / Nombres réels. Approximations décimales	21
Valeurs décimales approchées d'un réel	22
4 / Addition des réels. Structure de groupe	24
Propriétés de l'addition	24
5 / Groupes archimédiens	27
Le théorème fondamental d'homomorphisme	27
Application au problème de la mesure des grandeurs	31
6 / Caractérisations axiomatiques de \mathbb{R} en tant que groupe	32
Le théorème fondamental d'isomorphisme	33
7 / Automorphismes de $(\mathbb{R}, +)$. Structure de corps. Homomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même	34
Produit de réels	36
Existence du quotient	37
Existence de la racine carrée	38
8 / Corps ordonnés. Caractérisation de \mathbb{R} en tant que corps	39
Le théorème d'homomorphisme	40
Homomorphismes de corps de \mathbb{R} dans lui-même	42
Existence de corps ordonnés non archimédiens	43

CHAPITRE II / <i>Approfondissement de la structure vectorielle</i>	45
1 / Notion générale de corps	45
Exemple de corps non commutatif: le corps des quaternions	46
Isomorphismes, automorphismes et antiautomorphismes	47
Le problème des automorphismes de corps	48
Le problème des corps finis	48
2 / Espaces vectoriels sur un corps quelconque	49
Extension des notions usuelles	50
Le théorème d'échange	51
3 / Espaces vectoriels de dimension finie	53
Le théorème de la base incomplète	54
4 / Applications linéaires et semi-linéaires	56
Espace quotient. Décomposition canonique d'une application semi-linéaire	58
Utilisation de bases	59
L'espace des applications linéaires ou semi-linéaires	60
5 / Applications linéaires et semi-linéaires en dimension finie	61
Matrice d'une application linéaire	62
6 / Formes linéaires, hyperplans, dualité	63
Dualité	65
Transposée d'une application linéaire	66
7 / Dualité en dimension finie	67
Correspondance entre sous-espaces vectoriels de E et de E^*	68
Applications	68
Rang d'une application transposée	69
8 / Isomorphismes d'un espace vectoriel sur son dual (cas commutatif, en dimension finie)	70
9 / Problèmes relatifs à la dimension infinie	72
Le problème d'extension à la dimension infinie	73
10 / Quelques applications de l'axiome de Zorn	76
Existence de bases	77
Existence de supplémentaires	77
Prolongement d'applications linéaires	77
Existence de normes	78
Construction d'automorphismes non linéaires du groupe $(\mathbb{R}, +)$	78

CHAPITRE III / <i>Approfondissement de la structure affine</i>	81
1 / Introduction	81
Espaces homogènes	83
Cas particulier	83
2 / Espaces affines	84
3 / Sous-espaces affines (ou variétés linéaires affines)	86
Autres définitions	86
Cas d'un espace vectoriel	87
Dimension d'une variété linéaire affine	87
Intersection de variétés linéaires affines	88
Parallélisme	89
Sous-espace affine engendré par une partie X de \mathcal{G}	89
4 / Barycentres; application à l'étude des sous-espaces affines	90
Application aux variétés linéaires affines	92
Une caractérisation des sous-espaces affines	94
5 / Applications affines et semi-affines	95
Utilisation de repères affines	96
Application: équations d'un hyperplan affine ou d'une v.l.a.	97
Une caractérisation des applications affines	97
Points fixes des applications affines ou semi-affines	98
Les groupes affines et semi-affines	99
Projections	100
Symétries affines	100
Théorème de Thalès	101
6 / Prolongement canonique d'un espace affine dans un espace vectoriel. Applications	102
7 / Applications du théorème de plongement	105
Interprétation vectorielle des barycentres	105
Interprétation vectorielle des applications affines	106
8 / Caractérisation géométrique des applications semi-affines injectives	109
Cas du plan	111
9 / Le théorème fondamental de la géométrie affine	112
CHAPITRE IV / <i>Eléments de géométrie projective</i>	117
1 / Introduction	117
Problème des projections coniques	117
2 / Notion d'espace projectif	119
Sous-espaces projectifs	120
Coordonnées homogènes	121

3 / Morphismes projectifs. Homographies	122
Propriétés	124
Cas de morphismes injectifs	124
Homographies	125
Réalizations comme produits de perspectives	126
Le groupe projectif	127
4 / Le complété projectif d'un espace affine	127
Le théorème des projections	129
Retour du projectif à l'anneau	130
Prolongement des coordonnées barycentriques	131
5 / Principe de dualité	132
Cas d'un corps fini	133
6 / Droites projectives. Divisions harmoniques	134
La droite projective standard	134
Paramétrisations d'une droite projective	134
Divisions harmoniques	135
Exemple fondamental	136
Propriétés de la relation d'harmonicité	136
Condition d'harmonicité de quatre éléments $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de $\mathbb{P}^1(K)$	137
Interprétation des homologies harmoniques	139
7 / Faisceaux harmoniques de droites dans le plan	139
Application à la construction du conjugué harmonique	142
8 / Homographies de la droite projective. Birapport	143
Expression du birapport dans $\mathbb{P}^1(K)$	144
Interprétation des divisions harmoniques	145
Birapport de quatre droites concourantes (cas com- mutatif)	145
9 / Le plan projectif. Théorèmes de Ceva et de Ménélaus	146
Equations de droites	146
Passage de Ménélaus à Ceva	148
10 / Le théorème de Desargues	149
L'énoncé projectif du théorème de Desargues	149
Interprétation affine	150
Démonstration par expédition à l'infini	151
11 / Le théorème de Pappus et la commutativité du corps	152
12 / Le théorème fondamental de la géométrie projective	155
Collinéations et corrélations (en dimension finie)	158
CHAPITRE V / <i>Reconstruction axiomatique de la géométrie affine ou projective</i>	161
1 / Axiomes de base de la géométrie plane	161

Plans de type projectif	161
Plans de type affine	162
Corrélation dans un plan de type projectif	164
2 / Dilatations d'un plan de type affine	165
Propriétés des translations	166
Propriétés des homothéties	167
3 / Plans de translation	168
4 / Calcul vectoriel dans un plan de translation	172
La relation d'équipollence	172
Interprétation géométrique de l'équipollence	172
Le croisement des équipollences	173
Le groupe additif des vecteurs	173
5 / Le petit théorème de Thalès dans un plan de translation	174
6 / Le plan arguésien	178
Existence d'homothéties	180
7 / Construction du corps associé à un plan arguésien	181
Homothéties vectorielles	181
Structure de groupe additif sur K	184
Structure de corps de K	185
Retour au projectif	186
8 / Le plan de Pappus-Pascal	187
Retour au projectif	188
9 / Plans ordonnés, plans archimédiens	189
Plans de translation ordonnés	190
Plans archimédiens	191
10 / La structure affine d'un plan archimédien	192
11 / Espaces projectifs de dimension quelconque: interpréta- tion de l'axiome de Desargues par plongement	197
Notion de dimension; plans	199
Le théorème de Desargues dans l'espace	199
12 / La structure projective de l'espace	201
CHAPITRE VI / <i>Géométrie métrique (euclidienne et non eucli- dienne)</i>	205
1 / Introduction	205
2 / Axiomes du plan métrique	207
Le plan métrique	208
I. Axiomes d'incidence	208
II. Axiomes d'ordre	208
III. Axiomes des distances	209
IV. Axiomes de pliage	209

3 / Propriétés générales du plan métrique	210
Propriétés liées à l'ordre	210
Propriétés liées à la distance	211
Propriétés générales des automorphismes	212
4 / Symétries axiales. Droites perpendiculaires	213
Propriétés des symétries axiales	213
Médiatrice d'un segment	214
Droites perpendiculaires	215
Retour aux automorphismes	215
5 / Rotations	216
Produit de symétries	216
Le groupe des rotations de centre donné	217
Symétries centrales	218
6 / Angles	219
Relation d'ordre	221
7 / Addition et mesure des angles	223
Existence d'une graduation sur l'ensemble des angles	224
Problèmes d'orientation	227
8 / Inégalités dans le triangle. Applications	228
Triangles isocèles	228
Inégalités dans le triangle	229
9 / Perpendiculaires et obliques. Problèmes d'intersection	231
Application: intersection d'une droite et d'un cercle	232
Intersection de deux cercles	232
Intersection de deux droites	233
L'axiome d'Euclide	235
10 / Le quadrangle de Saccheri. Applications	236
Application à l'étude de la somme des angles d'un triangle	238
Une propriété des rectangles	239
11 / Diverses formes de l'axiome d'Euclide	240
12 / Le plan hyperbolique (modèle de Poincaré)	243
Distance de deux points	244
Expression de la distance hyperbolique	244
Automorphismes et symétries de \mathfrak{H}	246
<i>Exercices</i>	249
<i>Bibliographie</i>	283
<i>Index</i>	285