

# TABLE

## I. CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS LES ESPACES DE BANACH

1.	<i>Rappel de notions relatives aux espaces de Banach et aux applications linéaires continues</i>	11
1.1.	Normes sur un espace vectoriel $E$	11
1.2.	Exemples d'espaces de Banach	12
1.3.	Séries normalement convergentes dans un espace de Banach	14
1.4.	Applications linéaires continues	15
1.5.	Composition des applications linéaires continues	17
1.6.	Isomorphismes d'espaces vectoriels normés : normes équivalentes sur un e.v. normé	17
1.7.	Exemples d'espaces $\mathcal{L}(E; F)$	20
1.8.	Applications multilinéaires continues	24
1.9.	L'isométrie naturelle $\mathcal{L}(E, F; G) \approx \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$	26
2.	<i>Applications différentiables</i>	28
2.1.	Définition d'une application différentiable	28
2.2.	Dérivée d'une fonction composée	31
2.3.	Linéarité de la dérivée	32
2.4.	Dérivées de fonctions particulières	32
2.5.	Fonction à valeurs dans un produit d'espaces de Banach	36
2.6.	Cas où $U$ est un ouvert d'un produit d'espaces de Banach	38
2.7.	Combinaison des cas étudiés en 2.5 et 2.6	40
2.8.	Remarque finale : comparaison entre $\mathbf{R}$ -différentiabilité et $\mathbf{C}$ -différentiabilité	40
3.	<i>Théorème des accroissements finis ; applications</i>	41
3.1.	Enoncé du théorème principal	41
3.2.	Cas particuliers du théorème principal	44
3.3.	Théorème des accroissements finis lorsque la variable est dans un espace de Banach	44
3.4.	Encore le théorème des accroissements finis	48

TABLE

3.5. Une liste d'exercices	48
3.6. Première application du théorème des accroissements finis: convergence d'une suite de fonctions différentiables	49
3.7. Deuxième application du théorème des accroissements finis: relation entre différentiabilité partielle et différentiabilité	51
3.8. Troisième application du théorème des accroissements finis: notion de fonction strictement différentiable	53
4. <i>Inversion locale d'une application de classe <math>C^1</math>. Théorème des fonctions implicites</i>	54
4.1. Difféomorphismes de classe $C^1$	54
4.2. Le théorème d'inversion locale	56
4.3. Démonstration du théorème d'inversion locale: première réduction	57
4.4. Démonstration de la proposition 4.3.1	57
4.5. Démonstration du théorème 4.4.1	58
4.6. Théorème d'inversion locale dans le cas de la dimension finie	60
4.7. Théorème des fonctions implicites	61
5. <i>Dérivées d'ordre supérieur</i>	64
5.1. Dérivée seconde	64
5.2. Cas où E est un produit $E_1 \times \dots \times E_n$	67
5.3. Dérivées successives	69
5.4. Exemples de fonctions n fois différentiables	71
5.5. Formule de Taylor: cas particulier	75
5.6. Formule de Taylor: cas général	76
6. <i>Polynomes</i>	79
6.1. Polynomes homogènes de degré n	79
6.2. Polynomes non nécessairement homogènes	82
6.3. Les « différences » successives d'un polynome	84
6.4. Cas où E et F sont des espaces vectoriels normés	86
7. <i>Développements limités</i>	88
7.1. Définitions	88
7.2. Cas où f est n fois différentiable au point a	91
7.3. Opérations sur les développements limités	92
7.4. Composition de deux développements limités	93
7.5. Calcul des dérivées successives d'une fonction composée	95

8. <i>Maxima et minima relatifs</i>	96
8.1. Première condition nécessaire pour un minimum relatif	96
8.2. Condition du second ordre pour le minimum relatif	97
8.3. Condition suffisante pour le minimum relatif strict	98

EXERCICES	102
-----------	-----

## II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. <i>Définitions et théorèmes fondamentaux</i>	109
1.1. Équation différentielle du premier ordre	109
1.2. Équation différentielle d'ordre $n$	110
1.3. Solutions approchées	111
1.4. Exemple : équation différentielle linéaire	114
1.5. Cas lipschitzien : lemme fondamental	116
1.6. Application du lemme fondamental : théorème d'unicité	118
1.7. Théorème d'existence dans le cas lipschitzien	119
1.8. Cas où $f$ est localement lipschitzienne	121
1.9. Cas d'une équation différentielle linéaire	123
1.10. Dépendance de la valeur initiale	124
1.11. Cas où l'équation différentielle dépend d'un paramètre	125
2. <i>Équations différentielles linéaires</i>	127
2.1. Forme de la solution générale	127
2.2. Étude d'une équation linéaire homogène	127
2.3. Cas où $E$ est de dimension finie	129
2.4. Équation linéaire « avec second membre »	131
2.5. Cas d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n$	133
2.6. Équation différentielle linéaire d'ordre $n$ « avec second membre »	136
2.7. Équation différentielle linéaire à coefficients constants	137
2.8. Équation à coefficients constants : cas où $E$ est de dimension finie	139
2.9. Équation différentielle linéaire d'ordre $n$ à coefficients constants	141
3. <i>Questions diverses</i>	142
3.1. Groupes à un paramètre d'automorphismes linéaires	142
3.2. Noyau de groupe à un paramètre	144
3.3. Questions de différentiabilité	146
3.4. Questions de différentiabilité (suite): différentiabilité par rapport à la valeur initiale $u$	147
3.5. Démonstration du théorème 3.4.2	150

## TABLE

3.6. Différentiabilité par rapport à un paramètre dont dépend l'équation différentielle	151
3.7. Différentiabilité d'ordre supérieur	152
3.8. Cas d'une équation différentielle du second ordre	153
3.9. Équations différentielles ne contenant pas la variable	155
3.10. Équations différentielles « non résolues »	158
4. <i>Intégrales premières et équations aux dérivées partielles linéaires</i>	162
4.1. Définition des intégrales premières d'un système différentiel	162
4.2. Existence des intégrales premières	164
4.3. Équation aux dérivées partielles linéaire non homogène	166
4.4. Exemples	167
EXERCICES	169
INDEX	177