

# Darstellende Geometrie.

	pag.
Einleitung über Zweck und Bedeutung . . . . .	1
Methode . . . . .	2
Perspectivische Raumansicht . . . . .	3
Entwicklungsgang . . . . .	5
Erster Theil. Die Methodenlehre, entwickelt an der Untersuchung der geometrischen Elementarformen und ihrer einfachen Verbindungen.	
A. Die Centralprojection als Darstellungsmethode und nach ihren allgemeinen Gesetzen. §§ 1—23; pag. 6—80. Fig. 1—44.	
1. Die Data der Centralprojection: Centrum und Distanzkreis; die projicierenden Strahlen . . . . .	6
Beispiele 1—3 . . . . .	7
2. Die projicierenden Ebenen; die Verschwindungsebene . . . . .	—
Beispiele 1—3 . . . . .	8
3. Die Bestimmung der geraden Linie; Durchstosspunkt, Fluchtpunkt und Verschwindungspunkt; zweite Parallelebene . . . . .	—
Beispiele 1—12 . . . . .	10
4. Das projicierende Strahlenbüschel der Geraden und die Umlegung desselben in die Bildebene. Die Abschnitte der Geraden und ihres Bildes . . . . .	11
Beispiele 1—6 . . . . .	12
5. Die Bestimmung der Ebene, Spur, Fluchtlinie und Verschwindungslinie . . . . .	13
Beispiele 1—10 . . . . .	14
6. Die Regionen der Ebene und ihres Bildes; Strahlenbüschel und Ebenenbüschel bei der Projection der Ebene . . . . .	—
Beispiel 1—6 . . . . .	15
7. Die Normalebene zur Tafel durch eine Gerade; Auftragung der Tafelordinaten, Theilpunkt und Theilverhältniss . . . . .	16
Beispiele 1—8 . . . . .	17
8. Die zur Bildebene parallelen Geraden und Ebenen. Aufgaben über die gegenseitige Lage von Punkten, Ebenen und Geraden . . . . .	18
Beispiele 1—9 . . . . .	—
9. Der Winkel von zwei sich schneidenden Geraden, Bestimmung seiner wahren Grösse aus den Bildern seiner Schenkel . . . . .	19
Beispiele 1—3 . . . . .	21
10. Die Normalen zu einer Ebene und die Normalebenen zu einer Geraden; die Winkel zwischen Ebenen und Geraden und zwischen Ebenen . . . . .	—
Beispiele 1—13; Zusatz zu p. 22 . . . . .	22
11. Die Umlegung der Ebene d. i. ihrer Geraden und Punkte in die Bildebene; die Aufstellung der Ebene aus derselben . . . . .	25
Beispiele 1—2; Zusatz zu p. 27 . . . . .	27

§	pag.
12. Die Transformationen als Mittel zur Sicherung der practischen Ausführung der theoretischen Lösungen; Transformationen des Centrums; Construction sereoskopischer Bilder; Darstellung eines rechtwinkligen Paralelepedes mit reducirter Distanz . Beispiele 1—8; Zusatz zu p. 32 . . . . .	27 29
13. Die Verschiebungen des Objects und diejenigen der Bildebene Beispiele 1—2 . . . . .	32 33
14. Untersuchung der Beziehung zwischen dem ebenen System und seinem Bilde; Collineation in centraler Lage; Centrum und Axe der Collineation; Gegenaxen derselben . . . . . Beispiele 1—6. Collinearverwandte Figuren . . . . .	— 35
15. Die Abhängigkeit des Bildes der Geraden vom Original; Bedingung der Gleichheit entsprechender Strecken; Nullstrecken, Theilungspunkte . . . . . Beispiele 1—6 . . . . .	36 38
16. Das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden wird durch Projection nicht geändert; Doppelverhältniss von Strahlen- und Ebenenbüscheln. Harmonische Theilung; Doppelverhältnisse einer Gruppe; das vollständige Viereck und Vierseit Beispiele 1—14 . . . . .	39 41
17. Projectivische Reihen und Büschel. Die lineare Construction projectivischer Reihen in allgemeiner Lage . . . . . Beispiele 1—8. Gegenpunkte. Die Aehnlichkeit der Reihen; Ueberführung in perspectivische Lage; die centralprojectivische Bestimmung der Geraden . . . . .	46 48
18. Die lineare Construction projectivischer Strahlenbüschel in allgemeiner Lage . . . . . Beispiele 1—4. Ueberführung in perspectivische Lage; entsprechende Rechtwinkelpaare; Zusatz zu p. 53, 7) . . . . .	51 —
19. Die Projectivität der Reihen und Büschel im ebenen System und seinem Bilde; das charakteristische Doppelverhältniss einer Centralprojection . . . . . Beispiele 1—16. Die Charakteristik als einfaches Verhältniss und dessen geometrische Bedeutung; entsprechende Rechtwinkelpaare in concentrischen projectivischen Büscheln; perspectivische Dreiecke; Umlegung ebener Systeme; Doppellemente vereinigt projectivischer Reihen und Büschel . . . . .	54 56
20. Classification der Centralprojectionen nach den Werthen der Charakteristik; Involution, involutorische Reihen, Büschel, ebene Systeme; die Doppellemente und die harmonische Theilung Beispiel 1—8. Die Ueberführung von projectivischen Reihen und Büscheln in involutorische Lage; Doppelstrahlen involutorischer Büschel . . . . .	61 62
21. Die fünf Specialfälle der Collineation ebener Systeme: Affinität, axiale Symmetrie, Aehnlichkeit, centrische Symmetrie, Congruenz. Collineationen mit singulären Elementen . . . . .	65
22. Allgemeine Bestimmung und Construction der Projectivität ebener Systeme . . . . . Beispiele 1—6. Ueberführung zweier Vierecke in centrisch collineare Lage; zwei zu einem dritten System centrisch collineare Systeme . . . . .	69 71
23. Rückblick und Uebersicht. Der Prozess der Projection und die projectivischen Grundgebilde erster Stufe; ihre Zusammensetzung zu ebenen Systemen und zu Bündeln; der Raum als System von Punkten und von Ebenen und die Modellierungsmethoden; der Raum als Strahlensystem. Das Gesetz der Dualität als Symmetriegesetz des natürlichen Systems der Geo-	

§	pag.
metrie. Die Reciprocität, speciell die involutorische (Orthogonalsystem). Reciprocitäten mit singulären Elementen . . .	74
Beispiele 1—4 . . . . .	80
B. Die constructive Theorie der Kegelschnitte als Kreisprojectionen. §§ 24—36; pag. 81—136. Fig. 45—78.	
24. Die projectivischen Fundamenteigenschaften des Kreises und der Kegelschnitte, Doppelverhältniss von vier Punkten und von ihren Tangenten . . . . .	81
Beispiel . . . . .	84
25. Erzeugung der Curven zweiter Ordnung aus projectivischen Büscheln, der Curven zweiter Classe aus projectivischen Reihen; Bestimmung durch fünf Punkte oder Tangenten. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar . . . . .	—
Beispiele 1—9. Die involutorischen Haupteigenschaften des Kegelschnittbüschels und der Kegelschnittschaar; Bestimmung der Involution aus zwei Paaren . . . . .	86
26. Die Bilder des Kreises als Hyperbeln, Ellipsen, Parabeln und die Collinearverwandten der Kegelschnitte . . . . .	88
Beispiele 1—2; Zusätze zu p. 90 . . . . .	89
27. Der Satz vom Pascal'schen Sechseck und seine constructive Verwendung . . . . .	90
Beispiele 1—9. Construction der Kegelschnitte aus Punkten; ihre Tangenten in denselben; specielle Fälle und Sätze . . . . .	91
28. Der Satz vom Brianchon'schen Sechseck und seine constructive Verwendung . . . . .	94
Beispiele 1—12. Construction der Kegelschnitte aus Tangenten; ihre Berührungspunkte in denselben; specielle Fälle und Sätze. Identität der Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe; Zusatz zu p. 96 . . . . .	95
29. Projectivische Constructionen der Schnittpunkte einer Geraden und der Tangenten aus einem Punkte mit einem Kegelschnitt . . . . .	99
Beispiele 1—8 . . . . .	103
30. Der Kegelschnitt als sich selbst entsprechend in einer involutorischen Collineation; Centrum und Axe als Pol und Polare. Die constructiven Uebergänge zwischen denselben . . . . .	104
Beispiele 1—4 . . . . .	108
31. Die Probleme über involutorische Büschel und Reihen in einfachster Lösung . . . . .	109
Beispiele 1—18. Die Vervollständigung gegebener Involutionen; die Arten derselben. Involution rechter Winkel und Kreispunkte der Ebene; gemeinsames Paar von zwei Involutionen; Zusatz zu p. 108 . . . . .	—
32. Die Involutionen harmonischer Pole und Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt . . . . .	111
Beispiele 1—16. Orthogonale Kreise. Constructionen der Kegelschnitte aus den Involutionen harmonischer Pole und Polaren . . . . .	115
33. Von den reciproken Polarfiguren in der Ebene . . . . .	118
Beispiele 1—4 . . . . .	119
34. Die Specialfälle der Involutionen harmonischer Pole und Polaren mit unendlich fernem Träger in Bezug auf einen Kegelschnitt . . . . .	120
Beispiele 1—22. Der Mittelpunkt, die conjugierten Durchmesser, die Asymptoten und Axen. Construction derselben aus den Bestimmungselementen; Construction der Ellipse aus zwei conjugierten Durchmessern, speciell aus dem Kreise. Kegelschnitte aus gemischten Elementen (3, 2); Zusatz zu p. 123 . . . . .	—

§	pag.
35. Collinearverwandte des Kreises für seinen Mittelpunkt als Collineationscentrum oder die Scheitel rechtwinkliger Involutionen in Bezug auf einen Kegelschnitt: Brennpunkte und Directrixen . . . . .	126
Beispiele 1—22. Die Beziehungen der Brennpunkte zu den Tangenten und Punkten des Kegelschnitts; der Brennpunkt als Constructionselement . . . . .	130
36. Die Collinearverwandten des Kreises in Berührung zweiter Ordnung mit demselben: Osculationskreis und Krümmungshalbmesser . . . . .	133
Beispiele 1—4 . . . . .	135
C. Die centrische Collineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierungs-Methoden. §§ 37—45. p. 136—153. Fig. 79—85.	
37. Das Centrum, die Collineationsebene und die Gegenebenen der Central-Collineation räumlicher Systeme . . . . .	136
38. Das charakteristische Doppelverhältniss derselben . . . . .	137
Beispiele 1—2 . . . . .	138
39. Die Construction der entsprechenden Elemente zu gegebenen Geraden, Punkten und Ebenen in centrischcollinearen räumlichen Systemen . . . . .	—
Beispiele 1—9. Entsprechende ebene Systeme in denselben . . . . .	139
40. Die Ableitung der Projectionen des centrisch collinearen Systems zu einem gegebenen räumlichen System . . . . .	140
Beispiele 1—2 . . . . .	143
41. Die Bildlichkeit der centrisch collinearen räumlichen Systeme; die Reliefperspective und ihre Anwendungen . . . . .	—
Beispiele 1—6 . . . . .	144
42. Die involutorische Collineation räumlicher Systeme und die Specialfälle der Symmetrie in Bezug auf eine Ebene oder ein Centrum; die Affinität und die Congruenz. Die Modellierungs-Methoden der Technik . . . . .	145
43. Die Methoden der Abbildung auf eine Ebene als Grenzfälle der centrischen Collineation der Räume. Vorzüge der orthogonalen Projection. Die Nothwendigkeit der Combination von zwei Parallelprojectionen für die Bestimmung der Raumformen . . . . .	147
Beispiele 1—3 . . . . .	149
44. Von den projectivisch collinearen räumlichen Systemen und ihrer Bestimmung . . . . .	150
Beispiele 1—3 . . . . .	151
45. Die Beziehung von drei räumlichen Systemen, welche paarweis centrisch collinear sind . . . . .	152
Beispiele 1—4 . . . . .	153
D. Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojection, ihre Transformation und die Axonometrie. §§ 46—61; pag. 154—210. Fig. 86—129.	
46. Die Bestimmung der Punkte des Raumes in Bezug auf zwei zu einander rechtwinkelige Projectionsebenen und einen Anfangspunkt in ihrer Axe oder in Bezug auf drei zu einander rechtwinkelige Projectionsebenen; das projicierende Parallelepiped und die Coordinaten; die Neigungen der Geraden . . . . .	154
Beispiele 1—5. Die Halbierungsebenen und die Halbierungsaxen des Projectionssystems . . . . .	156
47. Die Ebene und ihre Spuren in den Projectionsebenen, ihre	

§	pag.
Schnitte mit den Halbierungsebenen und Halbierungsaxen, die Neigungen der Ebene	157
Beispiele 1—15. Das Orthogonalsystem der $S, s, H, h$ in der Ebene; specielle Lagen	158
48. Die Gerade und ihre projicirenden Ebenen, ihre Durchstoss- punkte und Punkte $\Phi_i$ ; die in ihr liegenden Punkte und die durch sie gehenden Ebenen	161
Beispiele 1—10	162
49. Die Darstellung der Projectionen eines Punktes und die sie ver- bindenden Gesetze; die Gerade von ihm nach dem Anfangs- punkt und ihre Tafelneigungen $\beta_i$	—
Beispiele 1—6	163
50. Die Darstellung der Projectionen der geraden Linie, ihrer Durchstosspunkte etc.	164
Beispiele 1—10	165
51. Die Darstellung einer Ebene durch ihre Spuren; die des Sy- stems ihrer $h_i$ und $H_i$ ; ihre Tafelneigungen; die Schnittlinie von zwei Ebenen	166
Beispiele 1—20	168
52. Die Darstellung einer Ebene durch zwei sich schneidende Ge- rade; die Construction des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene und der Schnittlinie von zwei Ebenen	169
Beispiele 1—6	171
53. Die Geraden $h_x, h_z$ , als Axen der Affinitäten zwischen den Projectionen ihres ebenen Systems; ihre Verwendung zur Be- stimmung der auf der Ebene liegenden Punkte und Geraden	—
Beispiele 1—12	173
54. Der Winkel von zwei Geraden und die Umlegung und Aufrichtung ebener Figuren	174
Beispiele 1—30. Projectionen des Kreises; Projection eines Dreiecks ähnlich einem gegebenen, Transversale zweier Ge- raden von gegebener Länge und parallel gegebener Ebene; die Probleme der dreiseitigen Ecke; reguläre Polyeder	175
55. Vom ebenen Schnitt eines Polyeders, speciell von den Schnitten der Pyramiden und Prismen	184
Beispiele 1—5	186
56. Die Durchdringung von zwei Polyedern	—
Beispiele 1—2	189
57. Von den Transformationen, ihren Vortheilen respective ihrer Nothwendigkeit; insbesondere von den Parallelverschiebungen des Projectionssystems oder der Objecte	—
Beispiele 1—2	191
58. Von den Drehungen der Objecte um Projectionssaxen oder um solche Gerade, die ihnen parallel sind	—
Beispiele 1—7. Ueberführung von Geraden und Ebenen in pa- rallele Lage zu den Projectionssaxen und Ebenen	192
59. Von den Drehungen des Projectionssystems	193
Beispiele 1—13. Die Ebenen durch eine Gerade unter bestimm- ten Winkeln zu einer anderen Geraden	194
60. Das Problem der Axonometrie für orthogonale Parallelpro- jection, seine Lösung durch Transformation, durch directe Con- struction aus dem Spurendreieck der Projectionsebene und durch Rechnung; die einfachen Verhältnisse der Maassstäbe, die isometrische, monodimetrische und anisometrische Darstel- lung	196
Beispiele 1—13. Der Schlämilch'sche Satz; die Transformation	200

§	pag.
61. Das Problem der Axonometrie für schiefwinklige Parallelprojection und der Pohlke'sche Satz als Specialfall der Bestimmung collinearer Systeme; die gegenseitige Lage der Bildebene und des projectirenden Strahles und die wahren Maasstäbe . . . Beispiele 1—10 . . . . .	203 208

Zweiter Theil. Die constructive Theorie der krummen Linien und Flächen.

A. Von den Curven und den developpablen Flächen. §§ 62—86; pag. 211—318. Fig. 130—174. Taf. I—IV.

62. Die Erzeugungsweisen ebener Curven und ihre regelmässigen Singularitäten; der Krümmungskreis . . . Beispiele 1—6. Die Benutzung von Hilfscurven für Tangente, Normale und Krümmungscenrum; Projectionen ebener Curven	211 214
63. Die Raumcurven und ihre developpablen Tangentenflächen; ihre stationären Elemente. Die Schmiegunngskugel . . . Beispiele 1—8. Vorbereitung für die Projection der Raumcurven: Specialfälle. Abwicklung und Richtungskegel . . . . .	216 219
64. Die Kegel- und Cylinderflächen unter Benutzung ebener Leitcurven; die Bestimmung ihrer Erzeugenden, Punkte und Tangentialebenen, ihrer Schnitte mit einer Geraden und ihrer Tangentialebenen aus einem Punkte in Parallel- und Centralprojection; die auf ihnen gelegenen Curven, insbesondere die Spuren . . . Beispiele 1—16. Schatten und Umrisse . . . . .	220 223
65. Die Collineation der ebenen Schnitte und die Singularitäten der Kegelflächen; die Affinität der Cylinderschnitte . . . Beispiele 1—8 . . . . .	227 228
66. Die Projectionen der ebenen Schnitte von Kegel- und Cylinderflächen . . . Beispiele 1—14. Centralprojection in allgemeinsten Form; Zusatz zu p. 235 . . . . .	229 232
67. Die directe Bestimmung der wahren Gestalt ebener Schnitte der Kegelflächen . . . Beispiele 1—2 . . . . .	235 237
68. Die Hauptsätze der Lehre von den Kegelflächen zweiten Grades	—
69. Von den besonderen Eigenschaften des Rotationskegels und ihrer constructiven Verwendung . . . Beispiele 1—4. Umrise der Rotationskegel . . . . .	239 241
70. Die ebenen Schnitte der Rotationskegel . . . Beispiele 1—10. Brennpunkt-Eigenschaften; Focalkegelschnitte	244 245
71. Die Abwicklung des Rotationskegels und seiner ebenen Querschnitte . . . Beispiele 1—6 . . . . .	247 249
72. Geodätische Linien auf entwickelbaren Flächen; ihre Schmiegungebene ist normal zur Tangentialebene . . . Beispiele 1—8. Die Veränderung des Krümmungsradius einer Curve bei der Abwicklung . . . . .	250 252
73. Die Schraubenlinie als geodätische Linie des Rotationscylinders . . . Beispiele 1—8 . . . . .	253 255
74. Die developpable Fläche der Schraubenlinie und die Evolventen der Normalschnitte . . . Beispiele 1—12. Die Doppelcurven der developpablen Schraubenfläche . . . . .	256 258
75. Der Richtungskegel der developpablen Schraubenfläche und seine constructive Benutzung . . . . .	260

§	pag.
Beispiele 1—10; Zusätze zu p. 262 . . . . .	262
76. Vom ebenen Querschnitt der developpabeln Schraubenfläche und seinen Singularitäten . . . . .	263
Beispiele 1—8 . . . . .	266
77. Die Abwicklung der developpabeln Schraubenfläche und der auf ihr gelegenen Curven. . . . .	—
Beispiele 1—6. Schraubenlinie der Krümmungscentra; Krümmungshalbmesser der Ellipse in den Scheiteln . . . . .	268
78. Ueber Hauptnormalen, Binormalen und Polarlinien der Raumcurven; von ihrer Polardeveloppabeln und ihrer rectificirenden Developpabeln, von Evolventen und Evoluten . . . . .	270
Beispiele 1—17. Krümmungslinien der developpabeln Flächen; Cycloiden und Evolventen . . . . .	272
79. Von den Durchdringungscurven der Kegelflächen mit einander und ihren developpabeln Flächen . . . . .	275
Beispiele 1—12. Unendliche Aeste der Durchdringungscurven und ihrer Bilder . . . . .	278
80. Die Ordnungszahl der Durchdringungscurve zweier Kegel; die Raumcurve vierter Ordnung . . . . .	280
Beispiele 1—10. Die einfachsten Raumcurven . . . . .	281
81. Von den Doppelpunkten der Durchdringungscurven der Kegel, insbesondere der Curven vierter Ordnung und dem Zerfallen derselben in ebene Curven; die Raumcurve dritter Ordnung und ihre developpable Fläche . . . . .	282
Beispiele 1—15. Die Raumcurve dritter Ordnung durch sechs Punkte . . . . .	289
82. Der Zusammenhang zwischen den Raumcurven und ihren ebenen Abbildungen. Die Charactere $m, r, h, y, \beta, n$ . . . . .	291
Beispiele 1—9. Schraubenlinie und Raumcurve dritter Ordnung . . . . .	295
83. Der Zusammenhang zwischen den Raumcurven und den ebenen Schnitten ihrer developpabeln Flächen; die Charaktere $n, r, g, x, \alpha, m$ . . . . .	296
Beispiele 1—9. Schraubenlinie und Raumcurve dritter Ordnung; Zusätze zu p. 298 . . . . .	298
84. Der projicirende Kegel der Curve und der Schnitt ihrer Developpabeln für besondere Lagen des Centrums respective der Ebene desselben . . . . .	300
Beispiele 1—19. Entstehung von Spitzen im Bilde. Die developpable Fläche der Raumcurve dritter Ordnung als Schattengrenze; aus sechs Ebenen . . . . .	302
85. Die Entstehung eines Doppelpunktes in der Durchdringungscurve zweier Kegel durch die Lage der Spitze des einen Kegels auf dem Mantel des andern; die Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt; Zusatz zu p. 308 . . . . .	304
Beispiele 1—12 . . . . .	308
86. Die Symmetrieverhältnisse der Raumcurve vierter Ordnung, d. i. ihre doppeltumschriebene Developpable und ihre doppelteingeschriebene Curve: Vier Kegel zweiten Grades und vier ebene Curven vierter Ordnung; ihre constructive Benutzung . . . . .	309
Beispiele 1—20. Endstellen des reellen Theils im Bilde; Zusatz zu p. 316 und 317 . . . . .	315

B. Von den krummen Flächen im Allgemeinen und den Flächen zweiten Grades insbesondere.

§§ 87—103; pag. 319—399. Fig. 175—191. Tafel V—XI.

§	pag.
87. Definitionen: Tangente, Tangentialebene und Normale der krummen Fläche in einem ihrer Punkte; Haupttangente; hyperbolische, parabolische, elliptische Punkte der Fläche . . . . .	319
Beispiele 1—8 . . . . .	320
88. Der doppelte Punkt und der Kegel zweiten Grades aus seinen Haupttangente; vielfache Punkte . . . . .	321
Beispiele 1—4 . . . . .	322
89. Die Flächen zweiter Ordnung als solche mit hyperbolischen oder mit elliptischen oder mit parabolischen Punkten . . . . .	—
Beispiele 1—2. Kegel zweiten Grades . . . . .	324
90. Die Fläche zweiter Ordnung mit hyperbolischen Punkten und ihre beiden Regelschaaren; ihre projectivische Erzeugung. Einfaches Hyperboloid und hyperbolisches Paraboloid . . . . .	—
Beispiele 1—17. Das Parallelepiped von drei Paaren paralleler Erzeugender, das windschiefe Viereck und seine Transversale; Spur und Fluchtlinie des Hyperboloids; hyperbolisches Paraboloid. . . . .	325
91. Von der Projectivität des Büschels der Tangentialebenen zur Reihe ihrer Berührungspunkte und ihrer Verwendung . . . . .	329
Beispiele 1—18. Erzeugungsweisen der Regelflächen zweiter Ordnung; längs einer Erzeugenden berührende Hyperboloide; Centralpunkt und Normalenparaboloid . . . . .	330
92. Schnitt mit einer Ebene und Berührungskegel aus einem Punkte; die Umrisse der Regelflächen zweiter Ordnung . . . . .	332
Beispiele 1—17. Der Asymptotenkegel; die Strictionslinie . . . . .	334
93. Die Punkte und die Tangentialebenen, welche eine Gerade mit einer Regelfläche zweiter Ordnung gemein hat; Bestimmung eines Punktes der Fläche aus einer seiner Projectionen . . . . .	336
Beispiele 1—15. Transversalen zu vier Geraden; Schnitt längs einer Geraden sich berührender Hyperboloide . . . . .	339
94. Von den Nichtregelflächen zweiter Ordnung; Pol und Polarebene; Quadrupel harmonischer Pole und Polarebenen . . . . .	341
Beispiele 1—18. Flächen zweiter Ordnung als Involutionsgestalten; Polarreciprocität; Bündel der Polarebenen und Büschel derselben; conjugierte Tangente . . . . .	344
95. Durchmesser, Mittelpunkt und Diametralebenen der Flächen zweiten Grades, Erzeugung derselben durch Bewegung von Kegelschnitten . . . . .	346
Beispiele 1—16. Die Kugel und der unendlich ferne imaginäre Kreis; Orthogonalität . . . . .	349
96. Folgerungen für die Darstellung der Flächen zweiten Grades in Parallel- und Centralprojection . . . . .	351
Beispiele 1—12. Ebener Schnitt und Berührungskegel der durch drei conjugierte Durchmesser bestimmten Fläche zweiten Grades . . . . .	353
97. Die Axen und Scheitel, die Hauptebenen und Hauptschnitte der Flächen zweiten Grades . . . . .	357
Beispiele 1—20. Die Axen des Ellipsoids aus drei conjugierten Durchmessern; Rotationsflächen; Kreisschnitte und Kreispunkte der Flächen zweiten Grades. Gemeinsames Tripel zweier Polarsysteme; Zusatz zu p. 361. . . . .	359

§	pag.
98. Die elliptischen Flächen zweiten Grades als Collinearverwandte der Kugel; Kreisschnitte derselben . . . . .	364
Beispiele 1—12; Zusätze zu p. 367 und 368 . . . . .	366
99. Durchdringungscurven und gemeinsam umschriebene Developpable von zwei Flächen zweiten Grades in speciellen Fällen. Beispiele 1—22. Ebene Schnitte von kreisförmigen Projectionen; Kegel über ebenen Schnitten und stereographische Projectionen; Zusätze zu p. 375 . . . . .	369
100. Die Symmetrieverhältnisse der Durchdringungscurve von zwei concentrischen Flächen zweiten Grades; die involutorischen Beziehungen für den allgemeinen Fall . . . . .	376
Beispiele 1—28. Das Bündel von Flächen zweiten Grades und das gemeinsame Quadrupel harmonischer Pole und Polarebenen für dieselben . . . . .	380
101. Das Problem von der gemeinsam umschriebenen Developpabeln von zwei Flächen zweiten Grades wird durch das Princip der Reciprocität auf das Vorige zurückgeführt . . . . .	385
Beispiele 1—27. Die Flächenschaar zweiten Grades; Developpabele von gleichem Fallen durch einen Kegelschnitt; confocale Flächen zweiten Grades, Krümmungslinien . . . . .	389
102. Die doppelte Erzeugung der krummen Flächen durch aufgeschriebene Curven und umschriebene Developpable, die conjugierten Tangenten und die Indicatrix . . . . .	393
Beispiele 1—8. . . . .	395
103. Die Curven der Haupttangenten oder asymptotischen Linien der Flächen; die Krümmungslinien derselben, die Hauptnormalschnitte und das Normalenbündel . . . . .	396
Beispiele 1—2. . . . .	399
C. Von den windschiefen Regelflächen.	
§§. 104—114; pag. 400—440. Fig. 192—206.	
104. Die doppelte Erzeugung derselben durch drei Leitcurven oder drei Leitdeveloppabele . . . . .	400
Beispiele 1—8 Die Vielfachheit der Leitcurven respective Developpabeln und die Uebergänge derselben; singuläre Erzeugende und Tangentialebenen . . . . .	401
105. Drei Haupttypen und ihre einfachsten Beispiele: a) die flächgängige Schraube, Wölbfläche des Eingangs in den runden Thurm, Kugel-Conoid, Normalenbündel . . . . .	403
b) scharfängige Schraube, Wölbfläche des schiefen Eingangs, Cylindroid . . . . .	405
c) Die Flächen mit drei Leitcurven als Object der Theorie . . . . .	408
106. Ordnung und Classe oder Grad einer windschiefen Regelfläche und Reduction derselben . . . . .	—
Beispiele 1—9 . . . . .	409
107. Die Punkte der Erzeugenden einer Regelfläche und ihre Tangentialebenen nach ihrem projectivischen Entsprechen und die constructive Bestimmung derselben . . . . .	411
Beispiele 1—12. Die längs einer Erzeugenden berührenden Hyperboloide und Paraboide einer Regelfläche; Zusätze zu p. 415 und 416 . . . . .	413
108. Die rechtwinkligen Involutionen von Tangentialebenen der Regelfläche und die Strictionlinie derselben . . . . .	417
Beispiele 1—12. Das Normalenparaboloid, die singulären Erzeugenden . . . . .	418
109. Die doppeltaufgeschriebene Curve und die doppelumschriebene Developpable der Regelfläche . . . . .	420

§		pag.
	Beispiele 1—12. Doppelcurven; Curven der Haupttangenten	422
110.	Vom ebenen Querschnitt und vom Berührungskegel der windschiefen Regelfläche; Zusatz zu p. 425 . . . . .	424
	Beispiele 1—12. Umrisse und Schattengrenzen . . . . .	426
111.	Vom Richtungskegel und der asymptotischen Developpabeln der Regelfläche . . . . .	428
	Beispiele 1—10. Schraubenregelflächen . . . . .	—
112.	Die Schnittpunkte und die Tangentialebenen einer Regelfläche mit einer Geraden . . . . .	430
	Beispiele 1—4 . . . . .	—
113.	Die Verbindungen einer Regelfläche mit andern Flächen . . . . .	431
	Beispiele 1—10 . . . . .	432
114.	Von den windschiefen Regelflächen dritten Grades . . . . .	434
	Beispiele 1—4. Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art; Zusatz zu p. 440 . . . . .	439

#### D. Von den Rotationsflächen.

§§ 115—130; pag. 441—494. Fig. 207 - 225. Taf. XII.

115.	Die Erzeugung der Rotationsflächen durch Axendrehung aufgeschriebener Curven: Parallelkreise und Meridiane. Parallelkreisberührungskegel und Meridianberührungscylinder. Die Erzeugung der Rotationsflächen durch Axendrehung umschriebener Developpabeln . . . . .	441
	Beispiele 1—6 . . . . .	443
116.	Die constructive Bestimmung und Darstellung der Rotationsflächen durch Axe und erzeugende Curve . . . . .	444
	Beispiele 1—7 . . . . .	445
117.	Darstellung der Punkte von Rotationsflächen aus der der Axe und der erzeugenden Curve . . . . .	446
	Beispiele 1—6 . . . . .	447
118.	Darstellung der Tangentialebenen von Rotationsflächen bei gegebenem Berührungspunkt. Normalen der Rotationsflächen. Krümmungslinien und Curven der Haupttangenten derselben	448
	Beispiele 1—10 . . . . .	450
119.	Uebersicht der bei der constructiven Behandlung von Rotationsflächen auftretenden wesentlichen Aufgaben; Ordnung derselben in zwei nach dem Princip der Dualität sich entgegengesetzte Gruppen . . . . .	451
120.	Die ebenen Querschnitte der Rotationsflächen nach ihrer Construction durch Parallelkreise und durch Meridiane, ihre ausgezeichneten Punkte und ihre Symmetrieverhältnisse an sich und in den Projectionen . . . . .	453
	Beispiele 1—12 . . . . .	456
121.	Berührungskegel von Rotationsflächen mit gegebenem Scheitel nach ihrer Construction durch Parallelkreisberührungskegel und Meridianberührungscylinder und Symmetrie derselben; Berührungscylinder. Ihre Berührungscurven mit der Fläche und ihre Spuren in den Projectionsebenen und deren Bedeutung für die Beleuchtung der Fläche durch Licht aus punktförmiger Quelle . . . . .	458
	Beispiele 1—12. Von den singulären Punkten der Schlag-schattencurven und von den Berührungscylindern für Rotationsflächen, deren Meridiane Kegelschnitte sind; Zusatz zu p. 460	459
122.	Die projicirenden Berührungscylinder und Kegel der Rotationsflächen bei allgemeiner Lage der Axen und die Umrisse der Bilder dieser Flächen in Parallel- und Central-Projection	462

§	pag.
Beispiele 1—8; Zusatz zu p. 467 . . . . .	465
123. Punkte und Tangentialebenen, welche einer Rotationsfläche und einer geraden Linie gemein sind; zwei Constructionsmethoden für dieselben . . . . .	467
Beispiele 1—6 . . . . .	468
124. Tangentialebenen der Rotationsflächen von gegebener Neigung gegen eine feste Gerade und Berührungspunkte derselben; umschriebene Developpable, deren Richtungskegel ein Rotationskegel von gegebener Axenrichtung und festem Winkel an der Spitze ist, und ihre Berührungscurven mit der Fläche. Ihre Bedeutung als developpable Flächen von gleicher Helligkeit und als Linien gleicher Helligkeit auf den Rotationsflächen. Mögliche Interpretation der letztern im unbeleuchteten Theil der Fläche . . . . .	468
Beispiele 1—6 . . . . .	471
125. Die fundamentale Bedeutung der Beleuchtungsconstructions für Rotationskegel und Cylinder für die auf die hauptsächlichsten Familien der krummen Flächen bezüglichen Constructions dieser Art. Die einfachste Lösung für Kegel, Cylinder und Kugel . . . . .	—
Beispiele 1—11 . . . . .	475
126. Die specielle Durchführung der Beleuchtungsconstructions für Rotationsflächen und die Symmetrieverhältnisse ihrer Intensitätslinien . . . . .	476
Beispiele 1—6 . . . . .	480
127. Die Durchdringungen der Rotationsflächen mit Kegel- und Cylinderflächen und ihre Bedeutung im Sinne der Schattenconstruction . . . . .	—
Beispiele 1—11. Ein scheinbarer Doppelpunkt . . . . .	482
128. Von den Beziehungen der Rotationsflächen zu developpabeln Flächen . . . . .	485
Beispiele 1—3 . . . . .	486
129. Die gemeinsame aufgeschriebene Curve und die gemeinsame umgeschriebene Developpable von zwei krummen Flächen überhaupt; insbesondere im Falle von zwei Rotationsflächen mit parallelen oder mit sich schneidenden Axen; Zusatz zu p. 489 . . . . .	—
Beispiele 1—8 . . . . .	490
130. Durchdringung und gemeinsame Developpable von zwei Rotationsflächen, deren Axen sich kreuzen, insbesondere von Rotationsflächen zweiten Grades. Beziehungen zwischen drei krummen Flächen . . . . .	492
Beispiele 1—6 . . . . .	494

### Dritter Theil. Die Geometrie der Lage und die projectivischen Coordinaten.

A) Grundlagen und Coordinaten. § 131—146; pag. 495—568.  
Fig. 226—244.

131. Rückblick und nächstes Ziel: Eine von Voraussetzungen der Elementargeometrie unabhängige Begründung der Projectivität . . . . .	495
132. Die Gebilde der vier Stufen und die Element-Anzahlen derselben . . . . .	498
133. Perspective Dreiecke, Trieder, Vierecke: Harmonische Gruppen . . . . .	500

§	pag.
134. Die Projectivität der Gebilde erster Stufe und ihre Construction. Beispiele, besonders auch über die Involution 1—12 . . . . .	503
135. Die imaginären Elemente: Punkt, Ebene und Gerade erster Art und ihre Darstellung durch elliptische Involutionen von bestimmtem Sinn . . . . .	508
136. Die imaginäre Gerade zweiter Art, ihr Schnittpunkt mit einer Ebene, ihre projectierende Ebene aus einem Punkt; Zählung der imaginären Elemente . . . . .	513
137. Die Bedingungen der Projectivität als Grundlagen der Coordinatenbestimmung innerhalb der geometrischen Grundgebilde der verschiedenen Stufen . . . . .	521
138. Die Coordinatenbestimmung für die Gebilde erster Stufe: Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel . . . . .	523
Beispiele 1—3 . . . . .	525
139. Die Coordinatenbestimmung in der Ebene für Punkte und für gerade Linien, und im Bündel für Strahlen und Ebenen . . . . .	525
Beispiele 1—6 . . . . .	528
140. Die Verbindung beider Bestimmungsmethoden in der Ebene, respective im Bündel; Gleichungen der Geraden, des Punktes — der Ebene, des Strahls . . . . .	530
Beispiele 1—14. Die Cartesischen und Plückerschen Coordinaten als Specialfall der projectivischen Coordinaten . . . . .	532
141. Die Verbindungslinie (Ebene) von zwei Punkten (Strahlen) und der Durchschnittspunkt (Strahl) von zwei Geraden (Ebenen) . . . . .	535
Beispiele 1—8. Theilverhältnisse . . . . .	538
142. Die Coordinatenbestimmung im Raum für Punkte und Ebenen . . . . .	542
143. Die Verbindung beider Bestimmungsmethoden im Raum, Gleichungen der Ebene und des Punktes . . . . .	546
Beispiele 1—4 . . . . .	550
144. Die Specialfälle der Cartesischen und Plücker'schen Coordinaten . . . . .	551
Beispiele 1—12. Ebene durch drei Punkte, etc.; Auflösung linearer Gleichungen . . . . .	552
145. Die gerade Linie im Raum als Verbindungslinie von Punkten respective als Schnittlinie von Ebenen, ihre sechs Coordinaten und die Beziehungen zwischen denselben in geometrischer Entwicklung . . . . .	558
Beispiele 1—6. Construction der Geraden aus ihren sechs Coordinaten; Doppelverhältniss einer Geraden . . . . .	561
146. Die geometrische Bedeutung von homogenen Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen zwei, drei, vier respective sechs Variabeln; Bedeutung der Coexistenz von zwei und drei solchen Gleichungen . . . . .	564

B) Die Parameter der Gebilde und die Projectivität; Erzeugnisse der projectivischen Gebilde erster Stufe.

§§ 147—158; p. 569—642. Fig. 245—252.

147. Zahl der linearen Bestimmungselemente einer geometrischen Form und Gebilde verschiedener Stufen. Involutionen . . . . .	569
Beispiele 1—4 . . . . .	572
148. Die geometrische Bedeutung des Parameters im Elementar-Gebilde erster Stufe . . . . .	572
Beispiele 1—6 . . . . .	575
149. Anwendung auf die Beziehungen der Elementar-Gebilde erster Stufe zu Formen $n^{\text{ten}}$ Grades. Polarentheorie . . . . .	576

§	pag.
Beispiele 1—12. Curven und Flächen zweiter Ordnung. Plücker'sche Formeln. Uebergang von Punkt- zu Ebenen- Koordinaten . . . . .	581
150. Geometrische Deutung des Parameters; die Polarengelbilde der verschiedenen Grade und Stufen . . . . .	585
Beispiele 1—3 . . . . .	587
151. Die Parameter-Gleichung der Projectivität der Gebilde erster Stufe; Involution derselben . . . . .	587
Beispiele 1—13. Entsprechende Rechtwinkelpaare. Imaginäre Elemente. Algebraische Correspondenz ( $m, n$ ) . . . . .	592
152. Die Coordinatengleichungen der Projectivität der Gebilde der verschiedenen Stufen . . . . .	596
Beispiele 1—12 . . . . .	602
153. Die Transformation der projectivischen Coordinaten . . . . .	604
154. Algebra der linearen Substitutionen: Invarianten und Cova- rianten insbesondere Kegelschnitte . . . . .	609
Beispiele 1—8. Reduction auf die Normalform; Zusatz zu p. 614 und 615 . . . . .	614
155. Erzeugnisse projectivischer Gebilde erster Stufe in analytischer Ausdrucksform . . . . .	616
Beispiele 1—8 . . . . .	621
156. Die Projectivitäten der Erzeugnisse aus Elementargebildern erster Stufe. Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt . . . . .	622
Beispiele 1—8. Analytische Ausdrucksform . . . . .	628
157. Projectivität der Erzeugnisse aus projectivischen Elementar- Gebilden und Verbindung derselben zu neuen Erzeugnissen; Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art. Projectivität der Regelschaaren eines einfachen Hyperboloids und projectivische Gebilde im Kegelschnitt. Involution . . . . .	629
Beispiele 1—12. Analytische Ausdrucksform. Gemeinsame Paare von zwei projectivischen Gruppen . . . . .	636
158. Involutionen aller Grade im Kegelschnitt. Doppelpunkte der- selben; gemeinschaftliche Paare zweier Involutionen. Enve- loppen ihrer Sehnen; Zusatz zu p. 641 . . . . .	639
Beispiele 1—10 . . . . .	641

C) Die projectivischen Gebilde zweiter und dritter Stufe und  
die Erzeugnisse ihrer Verbindung.

§§ 159—172; pag. 643—730; Fig. 253—260.

159. Zehn Projectivitäten der Gebilde zweiter Stufe und ihre Er- zeugnisse; ineinanderliegende collineare Ebenen, vereinigte Elemente; perspectivische Lage . . . . .	643
Beispiele 1—6 . . . . .	647
160. Ineinanderliegende reciproke Gebilde zweiter Stufe; involu- torisch entsprechende Elemente, Pol- und Polarkegelschnitt. Die doppelt conjugierten Elemente und ihre quadratische Ver- wandtschaft . . . . .	648
Beispiele 1—6 . . . . .	656
161. Die Polarreciprocität in Gebilden zweiter Stufe Mittelpunkt und Axen derselben. Polardreiecke. Entsprechende Tripel sind perspectivisch . . . . .	657
Beispiele 1—12. Orthogonalsystem im Bündel. Elementare Metrik . . . . .	661
162. Zwei vereinigte Polarsysteme im Gebilde zweiter Stufe: Ge- meinsames Tripel, Elemente $s_{ik}$ und $T_{ik}$ . Relationen zweier	

§	Pag.
Kegelschnitte; der Kegel zweiten Grades und das Orthogonal- system aus seinem Scheitel: Axen, Focalstrahlen, cyclische Ebenen; Zusatz zu p. 665 . . . . .	664
Beispiele 1—8. Erweiterung der Begriffe von Büschel und Schaar; Zusatz zu p. 671 . . . . .	669
163. Erzeugnisse der Verbindung zweier reciproker Gebilde zweiter Stufe: Flächen zweiten Grades . . . . .	671
Beispiele 1—9. Analytische Darstellung. Ebene Abbildung der Flächen zweiten Grades . . . . .	676
164. Erzeugnisse der Verbindung von zwei collinearen Gebilden zweiter Stufe: Curve dritter Ordnung, Developpable dritter Classe, Congruenzen ihrer Sehnen und Doppeltangenten . . . . .	678
Beispiele 1—8 . . . . .	683
165. Identität der Curve dritter Ordnung mit der Rückkehrcurve der Developpabeln dritter Classe. Nullsystem. Projectivische Beziehung und Verbindung der neuen Erzeugnisse mit früheren und unter einander . . . . .	684
Beispiele 1—9. Curve dritter Ordnung; Curve vierter Ordnung erster Art mit Spitze. Regelflächen fünften und sechsten Grades . . . . .	689
166. Collineare Räume: Hauptelemente. Centriscbe Collineation und Involution. Geschaarte Involution. . . . .	694
Beispiele 1—12. Symmetrie in Bezug auf eine Axe im Raum. Congruenz erster Ordnung und Classe . . . . .	698
167. Der tetraedrale Complex und sein Doppelverhältniss; insbe- sondere für zwei Flächen zweiten Grades . . . . .	699
Beispiele 1—8 . . . . .	703
168. Reciprocität der Räume: Pol- und Polarfläche. Doppelt con- jugierte Elemente und ihre Verwandtschaft. Involutionisch con- jugierte Elemente . . . . .	704
Beispiele 1—8. Zusatz zu p. 710 . . . . .	710
169. Polarsystem im Raum: Polartetraeder. Ueberführung reci- proker Räume in involutorische Lage . . . . .	710
Beispiele 1—18. Zwei Polarsysteme. Flächenbüschel und Schaaren vom zweiten Grade. Confocale Flächen, Focalkegel- schnitte . . . . .	713
170. Das Nullsystem und der lineare Complex. Complexcurven. Beziehungen zur Mechanik . . . . .	717
171. Erzeugnisse von drei collinearen Gebilden zweiter Stufe: Fläche dritter Ordnung. Ebene Abbildung derselben, sieben und zwanzig Gerade . . . . .	721
Beispiele 1—15. Flächen dritter Ordnung mit Doppelpunkten. Erzeugnisse aus drei und mehreren Gebilden zweiter und dritter Stufe . . . . .	726
172. Erzeugnisse aus drei und mehreren Gebilden zweiter und dritter Stufe . . . . .	728