

## INHALTSVERZEICHNIS

1. MENGEN UND OPERATIONEN	13
1. Mengen	13
2. Teilmengen	13
3. Die positiven ganzen Zahlen	14
4. Die Vereinigung von Mengen	16
5. Der Durchschnitt von Mengen	18
6. Grenzwerte von Folgen von Mengen	21
7. Zusammenhang mit der Algebra	26
8. Äquivalenzrelationen	27
2. ÄQUIVALENZ VON MENGEN. KARDINALZAHLEN	32
1. Äquivalenz von Mengen	32
2. Beispiele für äquivalente Mengen	33
3. Abzählbare Mengen	36
4. Überabzählbare Mengen	38
5. Kardinalzahlen	39
6. Die Arithmetik der Kardinalzahlen	41
7. Die Menge $2^A$	43
3. DIE REELLEN ZAHLEN	47
1. Die rationalen Zahlen	47
2. Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen rationaler Zahlen	51
3. Die Summe von Äquivalenzklassen	53
4. Das Produkt von Äquivalenzklassen	54
5. Die Ordnung für Äquivalenzklassen	57
6. Konvergenz und Grenzwert	59
7. Die reellen Zahlen	62
8. Das Dedekindsche Verfahren	62
4. SÄTZE ÜBER GRENZWERTE	72
1. Einführung	72
2. Kleinste obere und größte untere Schranke einer Menge	72
3. Intervallschachtelungen	75
4. Metrische Räume	81
5. Häufungspunkte von Mengen	84
6. Der Satz von Bolzano-Weierstraß in metrischen Räumen	87

5. EINFACHE EIGENSCHAFTEN VON MENGEN	93
1. Abgeschlossene Mengen	93
2. Weitere Eigenschaften abgeschlossener Mengen	95
3. Abgeschlossene Mengen in metrischen Räumen	98
4. Perfekte Mengen	100
5. Offene Mengen	102
6. Die Struktur offener Mengen	105
7. Relativ zu einer Menge offene und abgeschlossene Mengen	107
6. DAS CANTORSCHES DISKONTINUUM	112
7. FUNKTIONEN	116
1. Definition	116
2. Einer Funktion zugeordnete Mengen	116
3. Stetige Funktionen	117
4. Eigenschaften stetiger Funktionen	120
5. Gleichmäßige Stetigkeit	122
6. Mengen von Unstetigkeitsstellen	125
7. Halbstetige Funktionen	128
8. Intervallfunktionen	130
9. Spezielle halbstetige Funktionen	132
10. Unbeschränkte Funktionen	135
8. FUNKTIONENFOLGEN	139
1. Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz	139
2. Folgen stetiger Funktionen	142
3. Gleichgradige Stetigkeit	146
4. Grenzfunktionen von Folgen stetiger Funktionen	149
5. Eigenschaften der gleichmäßigen Konvergenz	151
9. DIE ABLEITUNG EINER FUNKTION	156
1. Die Dini-Ableitung	157
2. Einfache Eigenschaften der Ableitung	158
3. Ein Satz von G.C. Young	160
4. Stetige Funktionen, deren Ableitungen nicht existieren	161
10. ORDNUNGSTYPEN UND ORDINALZAHLEN	165
1. Einführung	165
2. Spezielle Ordnungen	166
3. Wohlgeordnete Mengen	169
4. Vergleichbarkeit wohlgeordneter Mengen	172
5. Vergleichbarkeit von Kardinalzahlen	175
6. Die kleinste überabzählbare Ordinalzahl	176
7. Transfinite Induktion	177
8. Paradoxien	177

11. BORELSCHE MENGEN UND BAIRESCHES FUNKTIONEN	181
1. Einführung	181
2. Borelsche Mengen	181
3. Bairesche Funktionen	185
4. Beziehungen zwischen Borelschen Mengen und Baireschen Funktionen	189
12. ANWENDUNGEN VON WOHLORDNUNGEN	196
1. Einführung	196
2. Die Existenz einer überabzählbaren Menge, deren Durchschnitt mit jeder nirgends dichten Menge eine abzählbare Menge ist	196
3. Existenz einer Funktion, die auf jeder überabzählbaren Menge relativ zur Menge unstetig ist	197
4. Existenz einer Funktionenfolge, die in einer überabzählbaren Menge konvergiert, aber in keiner ihrer überabzählbaren Teilmengen gleichmäßig konvergiert	199
5. Zerlegung der Ebene in abzählbar viele Kurven	200
6. Existenz einer Funktion $f(x)$ , so daß $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x$ und $y$ , aber $f(x)$ nicht von der Form $c \cdot x$ ist	201
13. MASS UND MESSBARE MENGEN	204
1. Was ist ein Maß?	204
2. Die Definition des Lebesgueschen Maßes	205
3. Spezielle meßbare Mengen	208
4. Die Struktur meßbarer Mengen	210
5. Eigenschaften meßbarer Mengen	213
6. Nicht meßbare Mengen	219
14. METRISCHE EIGENSCHAFTEN VON MENGEN	225
1. Einführung	225
2. Der Überdeckungssatz von Vitali	225
3. Metrische Dichte	227
4. Eine Umkehrung des Dichtesatzes von Lebesgue	232
5. Die Ableitung einer monotonen Funktion	233
15. MESSBARE FUNKTIONEN	240
1. Definition	240
2. Einfache Eigenschaften meßbarer Funktionen	241
3. Auf meßbaren Mengen definierte Funktionen	244
4. Fast gleichmäßige Konvergenz	244
16. APPROXIMIERUNG MESSBARER FUNKTIONEN	247
1. Einführung	247

2. Fast stetige Funktionen	247
3. Approximierung durch stetige Funktionen	248
4. Approximierung durch Bairesche Funktionen	250
5. Stetigkeit einer meßbaren Funktion	253
<b>17. DAS LEBESGUESCHE INTEGRAL UND DAS RIEMANN- SCHE INTEGRAL</b>	256
1. Einführung	256
2. Definition des Lebesgueschen Integrals für beschränkte, meßbare, einfache Funktionen	257
3. Unbeschränkte, meßbare, einfache Funktionen	259
4. Summierbarkeit beliebiger meßbarer Funktionen	261
5. Das Riemannsches Integral	265
6. Eine Bedingung für die Existenz des Riemannschen Integrals	269
7. Ein Nachteil des Riemannschen Integrals	272
8. Ein weiterer Nachteil des Riemannschen Integrals	272
<b>18. DAS LEBESGUESCHE INTEGRAL ALS MENGENFUNKTION</b>	278
1. Einführung	278
2. Das Lebesguesche Integral auf einer meßbaren Menge	278
3. Das Integral einer Summe	280
4. Absolute Stetigkeit	283
5. Vollständige Additivität	287
6. Grenzwerte konvergenter Folgen von integrierbaren Funk- tionen (gleichmäßig beschränkter Fall)	290
7. Grenzfunktionen von Folgen nicht negativer, integrierbarer Funktionen	291
8. Der Satz von Lebesgue	294
<b>19. DER HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL- RECHNUNG</b>	298
1. Einführung	298
2. Die Formel $F'(x) = f(x)$ für beschränkte einfache Funktionen	298
3. Die Formel $F'(x) = f(x)$ für beliebige summierbare Funktionen	300
4. Beschränkte Variation und absolute Stetigkeit	305
5. $\int_0^x f'(\xi)d\xi$ für nicht fallende Funktionen	309
6. $\int_0^1 f'(\xi)d\xi$ für absolut stetige Funktionen	312
7. Definition der Länge	315
8. Die Formel $\int_0^1 [(f'(t))^2 + (g'(t))^2]^{1/2} dt$	317

20. EBENES MASS UND DOPPELINTEGRALE . . . . .	321
1. Einführung . . . . .	321
2. Definition des Maßes . . . . .	321
3. Beziehungen zwischen dem ebenen und dem linearen Maß . . . . .	323
4. Meßbare und summierbare Funktionen zweier Variablen . . . . .	326
5. Der Satz von Fubini . . . . .	327