

INHALT

Kapitel I: Multilineare Algebra

§ 1. Multilinearformen 12

Vektorraum $\mathfrak{M}_p X$ der p -Linearformen auf einem reellen Vektorraum X , graduierte Algebra $\mathfrak{M} X = \bigoplus \mathfrak{M}_p X$ der Multilinearformen auf X , Transformationsgesetze, Antisymmetrisierungsoperatoren S_p und S .

§ 2. Alternierende Multilinearformen 17

Vektorraum $A X = \bigoplus A_p X$ der alternierenden Multilinearformen auf X , Graßmannprodukt „ \wedge “ alternierender Multilinearformen, graduierte Graßmannalgebra $\Lambda X = \bigoplus \Lambda_p X$. Transformationsgesetze.

§ 3. Der \star -Operator 27

Kanonische Isomorphie von $\Lambda_p(X^*)$ und $(\Lambda_p X)^*$, kanonisch induzierte Skalarprodukte auf $\Lambda_p X$, Einführung von Orientierung und Volumenmaß mittels alternierender Multilinearformen. Definition und Eigenschaften des \star -Operators $\star: \Lambda_p X \rightarrow \Lambda_{n-p} X$ für einen n -dimensionalen, orientierten reellen Vektorraum X mit Skalarprodukt; Vektorprodukt auf einem 3dimensionalen, orientierten reellen Vektorraum X mit Skalarprodukt; Transformationsgesetze für den \star -Operator.

§ 4. Alternierende multilineare Abbildungen 40

Vektorraum $\tilde{\Lambda} X = \bigoplus \tilde{\Lambda}_p X$ der vektorwertigen alternierenden Multilinearformen, Transformationsgesetze, Graßmannprodukte, \star -Operator $\star: \tilde{\Lambda}_p X \rightarrow \tilde{\Lambda}_{n-p} X$, Vektorprodukt vektorwertiger alternierender Multilinearformen, Beziehungen zwischen den speziellen Formen $d\sigma \in \tilde{\Lambda}_1 X$, $dF \in \tilde{\Lambda}_{n-1} X$, $dV \in \tilde{\Lambda}_n X$ auf einem n -dimensionalen, orientierten reellen Vektorraum X mit Skalarprodukt.

Kapitel II: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

§ 5. Differenzierbare Abbildungen zwischen offenen Mengen in Zahlenräumen 51

\mathcal{C}^r -Abbildungen zwischen offenen Mengen in reellen Zahlenräumen und ihre Differentiale, Banachscher Fixpunktsatz, Satz über differenzierbare Umkehrabbildungen, lokale Zerlegungen regulärer \mathcal{C}^r -Abbildungen in \mathcal{C}^r -Diffeomorphismen, lineare Projektionen und \mathcal{C}^r -Einbettungen.

§ 6. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten 62

\mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeiten, Ring $\mathcal{C}^r(M)$ der r mal stetig differenzierbaren Funktionen auf einer \mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeit M , \mathcal{C}^r -Abbildungen zwischen \mathcal{C}^r -Mannigfaltigkeiten, \mathcal{C}^r -Untermannigfaltigkeiten, eigentliche Einbettungen, berandete Untermannigfaltigkeiten.

§ 7. Partition der Eins 75

Parakompaktheit, differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger, differenzierbare Zerlegungen der Eins zu gegebenen lokal-endlichen Überdeckungen.

§ 8. Vektorraumbündel 81

Vektorbündel über \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeiten, Faserprodukt von Vektorbündeln, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul $\Gamma(M, B)$ der Schnitte eines Vektorbündels B über M , Bündelhomomorphismen, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul $\mathcal{L}(M, B)$ der Linearformen auf einem Vektorbündel B über M , kanonische Isomorphie von $\mathcal{L}(M, B)$ und $\{\varphi: \Gamma(M, B) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M); \varphi \text{ linear}\}$, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul $\mathfrak{M}_p(M, B)$ (bzw. $\Lambda_p(M, B)$) der (alternierenden) p -Linearformen auf einem Vektorbündel B über M , Graßmannprodukt „ \wedge “ alternierender Multilinearformen, graduierte Graßmannalgebra $\Lambda(M, B) = \bigoplus \Lambda_p(M, B)$ der alternierenden Multilinearformen auf einem Vektorbündel B über M , Transformationsgesetze, vektorwertige (alternierende) Multilinearformen auf Vektorbündeln, entsprechende Graßmannprodukte und Transformationsgesetze.

§ 9. Das Tangentialbündel 95

Vektorraum $\mathfrak{D}_x M$ der Tangentialvektoren an eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M in $x \in M$, Differential $\mathfrak{D}_x F: \mathfrak{D}_x M \rightarrow \mathfrak{D}_x N$, $x \in M$, einer differenzierbaren Abbildung $F: M \rightarrow N$, Tangentialbündel $\mathfrak{D}M$ über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , Differential $\mathfrak{D}F: \mathfrak{D}M \rightarrow \mathfrak{D}N$ einer differenzierbaren Abbildung $F: M \rightarrow N$, Funktoreigenschaften, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul $\Gamma(M, \mathfrak{D}M)$ der Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M , kanonische Isomorphie von $\{\varphi: \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M); \varphi \text{ } \mathbb{R}\text{-Derivation}\}$ und $\Gamma(M, \mathfrak{D}M)$, Lie-Produkt in $\Gamma(M, \mathfrak{D}M)$, $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul $\mathfrak{F}_p(M) = \Lambda_p(M, \mathfrak{D}M)$ der Differentialformen vom Grade p und graduierte Algebra $\mathfrak{F}(M) = \bigoplus \mathfrak{F}_p(M)$ der Differentialformen auf M .

§ 10. Maße und Orientierungen 107

Riemannsche Metrik und differenzierbares (speziell Riemannsches) Volumenmaß auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, Existenzbeweise, Orientierbarkeit und Orientierungen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, kanonische Orientierung $\partial \mathcal{O}$ der Randmannigfaltigkeit ∂G einer berandeten Untermannigfaltigkeit G einer orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{O}) .

Kapitel III: Differentialrechnung der Differentialformen

§ 11. Die Garbe der Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit . . . 120

Differentialformenfunctor, Garben abelscher Gruppen, Ringe etc.; Garbenhomomorphismen, Träger eines Garbenhomomorphismus, Partition des identischen Garbenhomomorphismus zu gegebener lokal-endlicher Überdeckung, feine Garben, exakte Garbensequenzen, feine Auflösungen, Cohomologiegruppen, Differentialformen-garben ${}_M\mathfrak{F}_p$ und ${}_M\mathfrak{F}$ auf einer Mannigfaltigkeit M .

§ 12. Die äußere Ableitung 126

Ableitung von Funktionen, äußere Ableitung von Differentialformen und ihre Rechenregeln, Transformationsgesetze.

§ 13. Das Lemma von Poincaré und die de-Rham-Cohomologie . . 133

Geschlossene und exakte Differentialformen, homotope Abbildungen, Lemma von Poincaré für kontrahierbare Mannigfaltigkeiten, de-Rham-Sequenz und de-Rham-Cohomologie.

§ 14. Der Satz von Frobenius 139

Integralkurven eines Vektorfeldes, Frobenius-Kriterium für die Integrabilität von Systemen Pfaffscher Formen, involutive Teilvektorbündel des Tangentialbündels, Anwendung des Satzes von Frobenius auf Systeme partieller Differentialgleichungen.

§ 15. Vektorwertige Differentialformen 151

Vektorwertige Differentialformen, Graßmannprodukte, Rechenregeln und Transformationsgesetze, affiner Zusammenhang, speziell Riemannscher Zusammenhang, kovariante Ableitung vektorwertiger Differentialformen, Krümmungstensor und Torsion, flache affine Mannigfaltigkeiten, Divergenz eines Vektorfeldes auf einer affinen Mannigfaltigkeit.

§ 16. *-Operator, Coableitung, Laplace-Beltrami-Operator 170

-Operator $$: $\mathfrak{F}_p(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{n-p}(M)$, Coableitung δ : $\mathfrak{F}_p(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{p-1}(M)$, Laplace-Beltrami-Operator Δ : $\mathfrak{F}_p(M) \rightarrow \mathfrak{F}_p(M)$, Rechenregeln und Koordinatendarstellungen, speziell in Kugel- und Zylinderkoordinaten, Greensche Formeln, Transformationsgesetze für $*$, δ und Δ , *-Operator für vektorwertige Differentialformen $*$: $\mathfrak{F}_p(M) \rightarrow \mathfrak{F}_{n-p}(M)$, Beziehungen zwischen den speziellen Formen $ds \in \mathfrak{F}_1(M)$, $dF \in \mathfrak{F}_{n-1}(M)$, $dV \in \mathfrak{F}_n(M)$.

§ 17. Vektoranalysis 185

Kanonische Isomorphie von $\tilde{\mathfrak{F}}_0(M)$ und $\tilde{\mathfrak{F}}_1(M)$ für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M , Divergenz, Gradient, Rotation, vektorieller Laplace-Beltrami-Operator, Rechenregeln der Vektoranalysis und Koordinatendarstellungen, Lemma von Poincaré in Vektorschreibweise, verschiedene Divergenzbegriffe, Äquivalenzkriterien, Ricci-Tensor, geometrische Deutung der Divergenz.

Kapitel IV: Integrationstheorie auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

§ 18. Das Transformationsgesetz für Gebietsintegrale 201

Meßbare Mengen, Nullmengen, Riemannintegral über kompakten meßbaren Mengen, Volumenänderung unter Diffeomorphismen, Transformationsgesetze für Riemannintegrale über kompakten meßbaren Mengen.

§ 19. Integration von Funktionen und Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten 209

Integral stetiger Funktionen mit kompaktem Träger über Mannigfaltigkeiten mit differenzierbarem Volumenmaß $d\mu$, Linearität, Positivität, Transformationsgesetz, Integral stetiger Funktionen über kompakten meßbaren Mengen einer Mannigfaltigkeit mit Volumenmaß $d\mu$, Transformationsverhalten bei Wechsel des Volumenmaßes, Integral von Differentialformen, Linearität, Positivität, Transformationsgesetz, Integral vektorwertiger Differentialformen über flachen affinen Mannigfaltigkeiten.

§ 20. Satz von Stokes und seine Umkehrung 220

Der Satz von Stokes als Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, Anwendungen in Topologie und Algebra: Satz vom Igel, Brouwerscher Fixpunktsatz, Hauptsatz der Algebra; Umkehrung des Stokessche Integralsatzes, Abhängigkeitsgrad, Satz von Stokes für vektorwertige Differentialformen.

§ 21. Greensche Integralformeln 232

Greensche Integralformeln und ihre Umformulierung in der Sprache der Vektoranalysis, weitere Integralformeln der Vektoranalysis.

§ 22. Stückweise glatte Untermannigfaltigkeiten 238

Stückweise glatte Graphen stetiger Funktionen als lokale Bausteine stückweise glatter Untermannigfaltigkeiten, stückweise glatt berandete Untermannigfaltigkeiten, Integration über stückweise glatte Untermannigfaltigkeiten, Ausdehnung des Satzes von Stokes auf stückweise glatt berandete Untermannigfaltigkeiten.