

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

MÉTHODES DE COMPACTITÉ

1. Une équation hyperbolique non linéaire intervenant en Mécanique Quantique Relativiste	4
1.1 Position du problème	4
1.2 Espaces fonctionnels	5
1.3 Premier théorème d'existence	8
1.4 Démonstration du Théorème 1.1	9
1.5 Un théorème d'unicité	14
1.6 Un résultat de régularité	16
1.7 Un autre résultat de régularité. Bases spéciales	20
1.8 Inégalité et égalité de l'énergie	22
1.9 Remarques diverses	27
2. Exemples et contre-exemples dans le cas où il n'y a pas d'estimations globales <i>a priori</i>	28
2.1 Equation hyperbolique sans estimation <i>a priori</i> globale	28
2.2 L'ensemble \mathcal{W}	29
2.3 Théorème de stabilité	32
2.4 Un théorème de non-existence	34
2.5 Remarque	37
3. Un autre exemple d'équation hyperbolique non linéaire	38
3.1 Position du problème	38
3.2 Un théorème d'existence et d'unicité	38
4. Problèmes de vibrations non linéaires	43
4.1 Les équations d'évolution	43
4.2 Equations d'évolution modifiées	50
4.3 Le cas stationnaire	53
4.4 Cas stationnaire ; régularité	56
5. Lemmes de compacité	57
5.1 Orientation	57
5.2 Lemmes de compacité	57
5.3 Application du Théorème 5.1	62
6. Equations de Navier-Stokes (cas d'évolution)	64
6.1 Position du problème	64
6.2 Le cas de la dimension d'espace 2. Unicité	70
6.3 Base spéciale	72
6.4 Démonstration du Théorème d'existence 6.1 ; première méthode	75
6.5 Démonstration du Théorème d'existence 6.1 ; deuxième méthode	77

6.6	Un théorème de régularité	79
6.7	Un théorème d'existence globale de solution forte	82
6.8	Un théorème d'unicité	84
6.9	Dépendance en la viscosité	86
7.	Equations de Navier-Stokes (cas stationnaire)	98
7.1	Le problème homogène	98
7.2	Le problème non homogène	101
8.	Un exemple d'équation parabolique fortement non linéaire	106
8.1	Position du problème	106
8.2	Estimations <i>a priori</i> . Généralités	107
8.3	Utilisation des estimations	110
8.4	Enoncé du Théorème	111
8.5	Démonstration du Lemme 8.1	112
8.6	Démonstration de l'existence dans le Théorème 8.1	115
8.7	Démonstration de l'unicité dans le Théorème 8.1	119
9.	Problèmes de transmission et problèmes couplés	120
9.1	Un problème de transmission parabolique-hyperbolique	120
9.2	Equations couplées	129
10.	Equation non linéaire du type Schrödinger	131
10.1	Position du problème	131
10.2	Théorème d'existence et unicité	131
11.	Equations non linéaires sur des variétés sans ou avec bord	134
11.1	Position des problèmes	134
11.2	Formulation sur la variété \mathcal{I}	135
11.3	Résultats	136
11.4	Cas avec bord	139
12.	Equations d'évolution non linéaires dégénérées	140
12.1	Position du problème	140
12.2	Un résultat supplémentaire de compacité	141
12.3	Résolution du problème	144
13.	Problèmes	147
14.	Commentaires	148

CHAPITRE 2

MÉTHODES DE MONOTONIE ET DE MONOTONIE ET COMPACTITÉ

1.	Equations paraboliques monotones	155
1.1	Exemples. Le cas $p > 2$	155
1.2	Démonstration de l'existence	157
1.3	Démonstration de l'unicité	162
1.4	Un résultat général	162
1.5	Applications des résultats généraux	164
1.6	Résultats de régularité	167
1.7	Somme d'opérateurs monotones	168

2. Problèmes stationnaires	171
2.1 Premier résultat général	171
2.2 Un théorème d'unicité. Applications de dualité	173
2.3 Exemples	177
2.4 Les opérateurs pseudo-monotones	179
2.5 Les opérateurs du Calcul des Variations. Etude axiomatique	180
2.6 Les opérateurs du Calcul des Variations. Exemples	182
3. Changement d'espace pivot. Applications	190
3.1 Généralités	190
3.2 Exemple. Problème non linéaire de la diffusion	191
3.3 Problèmes à frontière libre	196
4. Problèmes non linéaires d'évolution sur une variété	204
4.1 Position du problème	204
4.2 Opérateur \mathcal{A}	204
4.3 Problème équivalent sur Γ	207
5. Variante des problèmes de Navier-Stokes — Méthode de monotonie et compacité	207
5.1 Généralités. Position des problèmes	207
5.2 Un théorème d'existence relatif au Problème 5.1	209
5.3 Un théorème d'unicité	216
5.4 Etude du Problème 5.3	217
6. Méthode de monotonie et opérateurs hyperboliques non linéaires	221
6.1 Position du Problème. Un théorème d'existence et d'unicité	221
6.2 Démonstration de l'existence	223
6.3 Démonstration de l'unicité	227
7. Méthode d'approximation d'opérateurs d'évolution par des opérateurs stationnaires ..	227
7.1 Généralités	227
7.2 Un théorème d'existence pour « équations d'évolution abstraites »	228
7.3 Applications (I). Equations paraboliques	235
7.4 Applications (II). Problèmes périodiques	236
7.5 Applications (III)	237
7.6 Applications (IV)	238
7.7 Remarques diverses	240
8. Inéquations variationnelles elliptiques	241
8.1 Exemples et orientation	241
8.2 Théorèmes d'existence pour les inéquations variationnelles elliptiques	245
8.3 Ensemble des solutions	248
8.4 Applications	249
8.5 Variantes	250
8.6 Interprétation des inéquations variationnelles avec les sous-différentielles ..	253
8.7 Régularité	255
8.8 Théorèmes de comparaison	263
8.9 Un autre type d'exemples	265
9. Inéquations d'évolution paraboliques	266
9.1 Position des problèmes	266
9.2 Hypothèses de compatibilité. Exemples	269

9.3	Théorème d'existence d'une solution « faible »	271
9.4	Théorème d'unicité de solution « faible »	276
9.5	Applications	277
9.6	Théorèmes de régularité	286
9.7	Remarques diverses	294
10.	Compléments divers	298
10.1	Equations d'évolution	298
10.2	Inéquations d'évolution	301
11.	Problèmes	301
12.	Commentaires	305

CHAPITRE 3

MÉTHODES DE RÉGULARISATION ET DE PÉNALISATION

1.	Régularisation elliptique et équations d'évolution	311
1.1	Orientation	311
1.2	Lemmes de maximalité	313
1.3	Premier théorème d'existence par la régularisation elliptique	316
1.4	Deuxième théorème d'existence par la régularisation elliptique	319
2.	Applications	321
2.1	Problèmes paraboliques généraux	321
2.2	Problèmes paraboliques généraux. Solutions périodiques	328
2.3	Systèmes hyperboliques non linéaires du 1 ^{er} ordre	329
2.4	Equations hyperboliques non linéaires du 1 ^{er} ordre et équations de transport non linéaires	331
2.5	Problèmes non linéaires de Schrödinger	333
2.6	Une équation non linéaire changeant de type	337
2.7	Problèmes paraboliques non linéaires dans des ouverts non cylindriques ...	343
2.8	Problèmes non linéaires de type mêlé	345
3.	Régularisation parabolique et inéquations variationnelles hyperboliques	346
3.1	Position des problèmes	346
3.2	Un résultat général	346
3.3	Applications	354
4.	Régularisation parabolique et équation de Korteweg et de Vries	361
4.1	Position du problème. Intégrales d'énergie	361
4.2	Un théorème d'existence. Régularisation parabolique	363
4.3	Remarques diverses	368
5.	Pénalisation et inéquations variationnelles elliptiques	368
5.1	Orientation	368
5.2	Opérateur de pénalisation	370
5.3	Application de la pénalisation	371
5.4	Exemples	374
5.5	Résultats de régularité	378
5.6	Remarques diverses	380

6. Pénalisation et inéquations variationnelles d'évolution paraboliques	381
6.1 Méthode générale	381
6.2 Exemples et applications à la régularité	385
6.3 Données initiales non nulles	390
6.4 Problèmes unilatéraux (ou d'inéquations) pour les opérateurs de Navier-Stokes (I)	394
6.5 Problèmes unilatéraux (ou d'inéquations) pour les opérateurs de Navier-Stokes (II)	398
7. Pénalisation et inéquations variationnelles d'évolution hyperboliques	402
7.1 Opérateurs linéaires	402
7.2 Exemples	407
7.3 Exemples d'inéquations pour opérateurs linéaires hyperboliques.....	409
8. Pénalisation et problèmes non linéaires dans des ouverts non cylindriques	413
8.1 Un exemple hyperbolique	413
8.2 Remarques diverses	417
9. Autres types d'approximation	417
9.1 Approximation d'inéquations elliptiques par des inéquations paraboliques ..	417
9.2 Nouveaux problèmes unilatéraux	420
10. Approximation par régularisation d'opérateurs multivoques	422
10.1 Equations multivoques hyperboliques	422
10.2 Inéquations multivoques hyperboliques	425
11. Problèmes	425
12. Commentaires	426

CHAPITRE 4

MÉTHODES ITÉRATIVES. SOLUTIONS PARTICULIÈRES

1. Approximation par les méthodes de différences finies	431
1.1 Orientation	431
1.2 Semi-discrétisation et inéquations variationnelles	432
1.3 Semi-discrétisation spatiale; application à une équation parabolique non linéaire dégénérée	437
2. Approximation par décomposition	446
2.1 Un problème de T. CARLEMAN. Énoncé du Théorème	446
2.2 Démonstration de l'unicité	448
2.3 Méthode de décomposition	449
2.4 Estimations <i>a priori</i>	451
2.5 Passage à la limite. Démonstration du Théorème d'existence.....	456
3. Approximation par troncature	459
3.1 Position du Problème. Énoncé du résultat	459
3.2 Méthode de troncature	460
3.3 Démonstration du Théorème 3.1	461
3.4 Un exemple d'inéquation	462

4. Approximation par des systèmes du type de Cauchy-Kowaleska	465
4.1 Orientation	465
4.2 Equation de Navier-Stokes	466
4.3 Equations sur une variété	471
5. Approximations successives	474
5.1 Généralités	474
5.2 L'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - u^{1+\alpha} = 0$	475
5.3 Une équation intégréo-différentielle non linéaire dans un espace du type de Gevrey	478
6. Solutions périodiques. Cas paraboliques	482
6.1 Orientation	482
6.2 Solutions périodiques des équations de Navier-Stokes	483
6.3 Remarques sur les problèmes unilatéraux	486
7. Solutions périodiques. Cas hyperboliques	489
7.1 Orientation	489
7.2 Résolution du problème (7.7) (7.8) par régularisation elliptique	491
7.3 Solutions périodiques d'inéquations hyperboliques	498
8. Comportement à l'infini en t	505
8.1 Orientation	505
8.2 Solutions bornées sur \mathbf{R}_t d'équations d'évolution paraboliques monotones ..	505
8.3 Le cas des inéquations paraboliques	511
8.4 Remarques diverses	515
9. Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles non linéaires liées à la théorie du contrôle optimal	515
9.1 Orientation	515
9.2 Problèmes de contrôle sans contraintes	516
9.3 Approximation par un problème d'évolution artificiel	517
9.4 Découplage du problème d'évolution artificiel	518
9.5 Découplage du problème de contrôle initial	520
9.6 Exemples	520
9.7 Remarques diverses	522
10. Problèmes	525
11. Commentaires	527
BIBLIOGRAPHIE	531