Seite

§. 2. *Imaginäre Asymptoten. Reelle und imaginäre elliptische Asymptoten. Asymptotenpunct* 64

Dass imaginäre Asymptoten die reellen vertreten können, geht aus der allgemeinen Form der Gleichung der Curve unmittelbar hervor. 73. Die Uebertragung der frühern Resultate auf den Fall imaginärer Asymptoten ist da immer statthaft, wo diese Resultate von dem Imaginären und Reellen der Asymptoten unabhängig sind. Beispiel. 74. Osculirende imaginäre Asymptoten. 75. Aufzählung der verschiedenen möglichen Fälle bei Curven der 4. und 5. Ordnung. 76—77. Elliptische Asymptoten. Asymptotenpunct. 78. Osculirende elliptische Asymptoten. 79. Systeme elliptischer Asymptoten. 80.

§. 3. *Parabolische Asymptoten* 70

Parabolische Asymptoten bilden den Uebergang zwischen hyperbolischen und elliptischen. Ueber die Natur parabolischer Zweige einer Curve. 81. Allgemeine Gleichung der Curven der n. Ordnung mit parabolischen Zweigen. Zwei überzählige Constanten. Bedeutung der einen. Fortschaffung der andern. In der allgemeinen Gleichung tritt unter den unendlich vielen parabolischen Asymptoten eine einzige ausgezeichnete, die fünfpunctig osculirende, in Evidenz. 82—83. Die fünfpunctig osculirende Asymptote kann durch eine mehr als fünfpunctig osculirende vertreten werden, was eine neue Particularisation der Curve voraussetzt. Curven der 4 Ordnung. 84. Curven der 5. Ordnung. 85. Allgemeine Form der Gleichung einer Curve der n. Ordnung mit einer, nach gegebener Ordnung osculirenden, parabolischen Asymptote. 86. Bestimmung des Maasses der Annäherung an eine gewöhnliche parabolische Asymptote. Ordnung der Annäherung. 87—88. Beziehung des parabolischen Contactes in unendlicher Entfernung zum hyperbolischen. 89. — Geradlinige Asymptoten neben parabolischen. Aufzählung der möglichen Fälle bei Curven der 4. und 5 Ordnung. 90—91. Allgemeine Gesetze darüber, wie die Existenz einer parabolischen Asymptote auf die Natur der geradlinigen Asymptoten Einfluss hat. Ausschliessung unmöglicher Fälle. Bezugnahme auf die Sätze der 28. und 34. Nummer. 92—94. Systeme zweier parabolischen Asymptoten. Allgemeine Gleichung. 95. Aufzählung der möglichen Fälle bei Curven der 4 und 5. Ordnung. 96. Systeme dreier parabolischen Asymptoten. Ausschliessung unmöglicher Fälle. 97—98.

§. 4. *Paare reeller oder imaginärer parallelen Asymptoten* 86

Während in dem Falle parabolischer Asymptoten die allgemeine Form $\Omega_n + \mu\Omega_{n-2} = o$ nicht mehr statthaft ist, wird sie im Falle paralleler Asymptoten unbestimmt. 99 Allgemeine Form mit den nothwendigen Constanten. 100. Zweien parallelen Asymptoten entspricht ein Doppelpunct, der unendlich weit liegt. 101. Osculirende parallele Asymptoten. Aufzählung der möglichen Fälle bei Curven der 4. und 5. Ordnung. 102. Allgemeine Formen für Curven einer beliebigen Ordnung. 103. Imaginäre parallele Asymptoten. 104. Art der Annäherung der Curve an ihre parallelen Asymptoten. 105. — Hyperbeln, welche die Curve auf ihren parallelen Asymptoten osculiren. Vollständige Discussion des Falles der Curven dritter Ordnung. Construction der fünfpunctig osculirenden Hyperbeln. 106—109. Curven mit mehreren Paaren paralleler Asymptoten. Aufzählung der möglichen Fälle bei Curven der 5. Ordnung mit zwei Paaren paralleler Asymptoten. 110.

§. 5. *Doppel-Asymptoten. Berührung zweier reellen oder imaginären unendlichen Zweige. Spitzen erster und zweiter Art in unendlicher Entfernung* . . . 97

Allgemeine Form. Spitze erster Art in unendlicher Entfernung. 111. Berührung zweier vollständigen Zweige in unendlicher Entfernung. 112. Discussion der allgemeinen Form, welche ausdrückt, dass eine Curve zwei zusammenfallende parallelen Asymptoten hat, von welchen eine die Curve m- und die andere m_1 punctig osculirt. Einfachste Form, um die unendlichen Zweige annäherungsweise darzustellen. 113. Wenn $m = m_1$, so bildet die Curve in unendlicher Entfernung eine Spitze erster Art, oder sie hat vier Zweige, welche an derselben Asymptote sich hinziehen, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet. 114. Ebenso

Seite

verhält sich, wenn $m_1 < 2m-1$ 115. Wenn $m_1 > 2m-1$, so hat die Curve zwei Paare, nach verschiedener Ordnung osculirende hyperbolische Zweige. 116. Wenn $m_1 = 2m-1$, so ziehen sich zu der gemeinschaftlichen Asymptote, zwei Paare unendlicher Zweige hin, welche mit derselben einen Contact von gleicher Ordnung haben. Sie können unter sich einen Contact höherer Ordnung haben. Jedesmal dass diese um eine Einheit steigt, bildet eine Spitze zweiter Art die Uebergangsstufe. 117. Discussion aller möglichen Formen bei Curven der 4. Ordnung, 118—119. Bei Curven der 5. Ordnung. 120—124.

§. 6. *Asymptoten der dritten Ordnung* 111

Natur derselben. 125. Erster Fall. Curven mit semicubi-parabolischen Asymptoten. Allgemeine Form ihrer Gleichung. 126. Art und Ordnung der Annäherung an diese Asymptoten. 127—129. Aufzählung der verschiedenen Fälle bei Curven der 4. Ordnung. 130. Bemerkungen über die Ausschliessung unmöglicher Fälle. 131-133. Der Lauf der unendlichen Zweige kann genauer dargestellt werden, wenn wir an die Stelle der semicubi-parabolischen Asymptote andere Curven der 3. Ordnung setzen. 134. Zweiter Fall. Curven mit Trident-Curven als Asymptoten. Allgemeine Form ihrer Gleichung. 135. Natur der unendlichen Zweige, welche eine Parabel und überdiess einen Durchmesser derselben zu Asymptoten haben. 136. Particularisation derselben. 137. Verschiedene Fälle bei Curven der 4. und 5. Ordnung. 138—139. Trident-Curven in Evidenz gebracht. 140—141. Dritter Fall. Curven mit cubi-parabolischen Asymptoten. Allgemeine Form ihrer Gleichung 142. Art und Ordnung der Annäherung. 143. Als Beispiel die Curven der 4. Ordnung. 144. Particularisationen. Als Beispiel die Curven der 4. und 5. Ordnung. 145—148. Vierter Fall. Curven mit drei parallelen Asymptoten. Allgemeine Gleichung derselben. Andere Form, in welcher die drei Asymptoten unmittelbar in Evidenz treten. 149—150. Maass der Annäherung. 151. Fall dreier reellen Asymptoten. Verschiedene Fälle bei Curven der 4. und 5. Ordnung. 152. Zwei Asymptoten können imaginär sein und zusammenfallen. 153—154. Alle drei können zusammenfallen. Discussion der Form der unendlichen Zweige. Erst nach neuen Particularisationen erhält die Curve drei Paare unendlicher Zweige, welche an derselben Asymptote sich hinziehen. 155—158. Vollständige Discussion der so particularisirten Gleichung für den Fall der Curven 6. Ordnung. Aufzählung aller möglichen Fälle. 159—162.

§. 7. *Aufzählung der verschiedenen Arten von Curven der vierten Ordnung, in Beziehung auf die Natur ihrer unendlichen Zweige* 136

Aufzählung von 152 Arten von Curven der 4. Ordnung, welche auf 8 Fälle sich vertheilen. Vergleichung mit der Euler'schen Aufzählung. 163.

§. 8. *Asymptoten der vierten Ordnung* 149

Natur derselben. Aufzählung der sieben verschiedenen Fälle, in welchen die frühern Formen nicht statthaft sind oder unbestimmt werden. I. Allgemeiner Fall. II. Neben semicubi-parabolischen Asymptoten eine geradlinige von bestimmter Richtung. III. Zwei Gruppen parabolischer Asymptoten von gemeinsamer Durchmesser-Richtung. Vollständige Discussion bei Curven der 5. Ordnung. Parabolische Spitzen zweiter Art. IV. Parabolische Asymptoten und zwei geradlinige. V. Cubi-parabolische Asymptoten und eine geradlinige. VI. Parabeln der vierten Ordnung als Asymptoten. VII. Vier parallele Asymptoten. 164. Anzahl der Constanten, von welchen diese Fälle abhängen. 165.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Singularitäten in dem Laufe der Curven.

Seite

§. 1. *Discussion der verschiedenen möglichen Fälle singulärer Puncte und singulärer Tangenten der Curven* 155

Bestimmung des Zusammenfallens mehrerer Durchschnittspuncte einer Curve und einer geraden Linie. 1. Analytische Entwicklungen. 2—4. Einfache Puncte. Osculirende Tangenten. Wendungspuncte. 5—7. Doppelpuncte. Allgemeine Unterscheidung derselben. 8. Lauf der beiden sich schneidenden Zweige in der Nähe des Doppelpunctes. Jeder derselben kann eine osculirende Tangente haben. 9. Isolirter Punct. 10. Fälle, in welchen die beiden Tangenten des Doppelpunctes zusammenfallen. I. Spitze erster Art. II. Zwei sich berührende Zweige, welche unter einander auch einen Contact höherer Ordnung haben können. Spitzen zweiter Art bezeichnen eine Uebergangs-Stufe, bevor diese Ordnung um eine Einheit ansteigt. III. Einer der beiden sich berührenden Zweige hat einen Wendungspunct. IV. Spitze erster Art mit innigerem Contacte. V. Zwei sich dreipunctig osculirende Zweige, welche unter einander auch einen Contact höherer Ordnung haben können. Spitzen zweiter Art als Uebergangs-Stufen. 11. Verallgemeinerung. Bedingungen, unter welchen eine Curve die verschiedenartigen Singularitäten erhält. 12. Dreifache Puncte. Allgemeine Unterscheidung derselben. 13. Discussion der drei verschiedenen Zweige, welche den dreifachen Punct bilden. 14. Ein conjugirter Punct, der auf einem Zweige der Curve liegt. 15. Wenn zwei der drei Tangenten des dreifachen Punctes zusammenfallen, so geht ein Zweig der Curve durch einen solchen singulären Punct, wie er in der 11—12. Nummer bestimmt worden ist. 16. Fälle, wo die Tangenten des dreifachen Punctes alle drei zusammenfallen. Discussion der Fälle, dass I. diese Tangente die Curve in vier, II—III. in fünf, IV—V. in sechs, VI—VIII. in sieben, IX—XIV. in acht, XV—XIX. in neun zusammenfallenden Puncten schneidet. 17. Wenn nur eine Singularität allein für sich betrachtet wird, vereinfacht sich die analytische Bestimmung derselben. 18. Hyperbolische und parabolische Singularitäten in unendlicher Entfernung. 19.

§. 2. *Genaue Bestimmung aller möglichen Singularitäten, welche in dem Laufe der Curven vierter Ordnung vorkommen können* 182

Analytische Bezeichnung. 20. Einfache Puncte. Drei- und vierpunctig osculirende Tangenten. Lauf der Curve vom Osculationspuncte aus. 21—24. Doppelpuncte. Durchschnitt zweier reellen Curven-Zweige. Wendungspuncte dieser Zweige. 25—27. Isolirter Punct. 28. Spitze erster Art. 29. Berührung zweier reellen oder imaginären Zweige. Im letztern Falle isolirter Punct. 30. Gewöhnliche Spitze zweiter Art. 31. Zwei reelle oder imaginäre Zweige, welche sich dreipunctig osculiren. Isolirter Punct. 32. Spitze zweiter Art mit der Contact-Ordnung $2\frac{1}{2}$. 33. In dem Falle sich berührender Curven-Zweige lassen sich die beiden fünfpunctig osculirenden Curven zweiter Ordnung zugleich in Evidenz bringen. 34. Dreifache Puncte. Drei in demselben Puncte sich schneidende Curven-Zweige. Ein Curven-Zweig geht durch einen conjugirten Punct. 35. Eine Spitze erster Art steht auf einem Curven-Zweige. 36. Die drei Tangenten des dreifachen Punctes fallen zusammen. 37. Systeme von zwei Doppelpuncten. Allgemeine Gleichung, in welcher die vier Tangenten der beiden Doppelpuncte in Evidenz treten. Zwei eigentliche Doppelpuncte. Ein Doppelpunct und eine Spitze erster Art. Zwei solcher Spitzen. Ein Doppelpunct und eine Berührung. Eine Spitze und eine Berührung. Ein Doppelpunct und eine Spitze zweiter Art. Eine Spitze erster und eine Spitze zweiter Art. 38—41. Isolirte Puncte. 42. Die unmöglichen Fälle kann man unmittelbar als solche erkennen. 43. Systeme von drei Doppelpuncten. Aufzählung von 10 verschiedenen Fällen. 44—45. Die sechs Tangenten der drei Doppelpuncte umhüllen einen Kegelschnitt. Beziehung dieses Kegelschnittes zur

Seite

Curve. 46. Ein, zwei und alle sechs Zweige können Wendungs-Puncte haben. Situations-Beziehungen. 47—50.

§. 3. *Ueber die Natur der singulären Puncte und singulären geraden Linien, und über die Art ihrer Entstehung* 200

Doppelte Entstehungsweise einer Curve. Wenn auf einer geraden Linie ein Punct continuirlich fortrückt, während die gerade Linie selbst um diesen Punct sich continuirlich dreht, wird ein und dieselbe Curve von jener geraden Linie umhüllt und von diesem Puncte beschrieben. Ein die Curve vertretendes Polygon. 51. Analytisch genommen, können wir die Grösse der Drehung der geraden Linie als Function der Grösse des Fortrückens des Punctes ansehen, und dadurch die Curve bestimmen. Differentiiren wir, so erhalten wir hieraus den Krümmungshalbmesser als Function des Bogens. 52. Der Begriff einer Singularität modificirt sich nach der zwiefachen Erzeugungsweise der Curve. Eine Curve hat entweder Wendungspuncte und Doppeltangenten oder Spitzen erster Art und Doppelpuncte; in untergeordneten Fällen hat sie beides. 53—54. Singularität in der Bewegung des beschreibenden Punctes; in der Drehung der umhüllenden geraden Linie; in Beiden zugleich. 55. Veranschaulicht dadurch, dass ein Polygon an die Stelle der Curve gesetzt wird. 56—58. Verallgemeinerung 59—60. Analytische Darstellung. Der Krümmungshalbmesser einer Curve ist gleich dem Quotienten, den man erhält, wenn man die Geschwindigkeit des beschreibenden Punctes durch die Geschwindigkeit der umhüllenden geraden Linie dividirt. 61. Wie in reciproken Curven die Singularitäten sich entsprechen. 62.

§. 4. *Gegenseitige Beziehung der singulären Puncte und singulären geraden Linien zu einander. Gesetze, nach welchen, bei algebraischen Curven, die Anzahl von jenen durch die Anzahl von diesen bestimmt ist, und umgekehrt* . . . 207

Das Princip der Reciprocität gibt unerwartete Aufschlüsse über singuläre Puncte. Zusammenstellung der schon im „Systeme" mitgetheilten Resultate. Reciproke Polar-Curve und Erklärung der Reduction ihrer Ordnung aus dem Vorhandensein von Wendungen und Doppel-Tangenten. Anzahl derselben. 63. Ein Doppelpunct verschlingt 6, eine Spitze erster Art. 8 Wendungen 64. Anzahl der eigentlichen Doppeltangenten, welche eine Curve verliert, wenn sie einen Doppelpunct oder eine Spitze erster Ordnung und wenn sie mehrere Doppelpuncte und Spitzen erhält. 65—67. Sechs allgemeine Relationen zwischen der Ordnung, der Classe, und der Anzahl der Doppelpuncte, Doppeltangenten, Spitzen und Wendungen irgend einer algebraischen Curve. Diese sechs Relationen führen sich auf drei, von einander unabhängige zurück. 68. Reduction der Ordnung der reciproken Polar-Curve, wenn Doppelpuncte und Spitzen vorhanden sind. 69. Der Unterschied der Anzahl der Tangenten, welche, von einem gegebenen Puncte aus, an eine algebraische Curve sich legen lassen und der Anzahl der Puncte, in welchen dieselbe Curve von einer geraden Linie geschnitten wird, ist gleich dem dritten Theile des Unterschiedes der Anzahl der Wendungen und Spitzen eben dieser Curve. 70. Merkwürdige Gleichung des 4. Grades zwischen der Anzahl der Doppelpuncte, Doppeltangenten, Spitzen und Wendungen einer algebraischen Curve. Particularisation. 71—73. Tabellarische Uebersicht der möglichen Fälle in Bezug auf die Anzahl der Doppelpuncte, Doppeltangenten, Spitzen und Wendungen, welche algebraische Curven neben einander haben können. 74. Maximum der Doppelpuncte 75. Fall zweier sich berührenden Zweige. 76. Ausführliche Discussion des Falles einer Spitze zweiter Art. Sie reducirt den Grad der Polar-Curve um 5 Einheiten. Reduction in der Anzahl der Doppeltangenten. Sie verschlingt 15 Wendungen. 77—81. Spitzen zweiter Art, deren Schenkel unter einander einen innigern Contact haben. 62. Spitzen zweiter Art neben Doppelpuncten und Spitzen erster Art. 83. Andre untergeordnete Arten von Doppelpuncten. 84. Fall eines drei- und mehrfachen Punctes. Reduction der Polar-Curve, der Anzahl der Wendungen, und der eigentlichen Doppeltangenten. 85—89. Die Theorie der vielfachen Puncte auf die Theorie der Doppelpuncte zurückgeführt. Anzahl der Doppeltangenten, die ein mehr-

Seite

facher Punct unmittelbar in sich aufnimmt. 89—91. Fall mehrerer dreifachen Puncte. 91. Ein solcher Punct neben Doppelpuncten und Spitzen erster Art. 92.

§. 5. *Ueber Doppel-Tangenten der Curven, insofern man sich diese durch einen Punct beschrieben, vorstellt. Discussion der allgemeinen Gleichung der Curven der vierten Ordnung, unter der Form:* $pqrs + \mu\Omega_2^2 = o$ 228

Allgemeine Bemerkungen über die Bestimmung der Doppel-Tangenten (Note). 93. Doppel-Tangenten der Curven vierter Ordnung. Allgemeine Form, in welcher die vier geraden Linien P, Q, R und S als Doppel-Tangenten in Evidenz treten. Geometrische Deutung dieser Form. Die drei Paare von Berührungspuncten auf irgend drei Doppel-Tangenten bilden ein solches Sechseck, um welches ein Kegelschnitt Ω_2 sich legen lässt. Derselbe Kegelschnitt geht überdiess durch die beiden Berührungspuncte auf einer vierten Doppel-Tangente. 94. Lage der Curve. 95. Die vier geraden Linien können den Kegelschnitt Ω_2 berühren, und sind dann vierpunctig osculirende Tangenten. Fall mehrerer solcher Tangenten. 96—97. Wenn zwei der vier geraden Linien auf dem Kegelschnitte sich schneiden, so erhält die Curve einen Doppelpunct. Fall zweier und dreier Doppelpuncte. Bezügliche allgemeine Formen mit den nothwendigen Constanten. 98. Fälle, wo in einem Doppelpuncte ein Zweig oder beide Zweige einen Wendungspunct haben. 99. Fälle, wo zwei der vier geraden Linien zusammenfallen. Zwei reelle oder imaginäre Doppelpuncte. Zwei sich berührende Zweige. 100. Fälle, wo drei der vier geraden Linien zusammenfallen. Zwei reelle oder imaginäre Spitzen erster Art. Zwei sich dreipunctig osculirende Zweige. 101. Fälle, wo der Kegelschnitt Ω_2 in ein System von zwei geraden Linien ausartet. Doppelpuncte, mit welchen Wendungspuncte zusammenfallen. Dreifache Puncte verschiedener Art. 102. Fälle, wo die beiden, den Kegelschnitt Ω_2 vertretenden, geraden Linien zusammenfallen. 103. Anderes Princip der Discussion. Frühere Fälle. Spitzen zweiter Art. 104—107. Fälle, wo auf den Doppel-Tangenten ein Berührungspunct oder beide unendlich weit rücken. Alle verschiedenen Arten singulärer Puncte können auf einem Hyperbel-Zweige unendlich weit rücken. Allgemeine Gleichungen mit den nothwendigen Constanten. 108—111. Fälle, wo unter den Doppel-Tangenten eine, zwei, drei unendlich weit gerückt sind. Untergeordnete Fälle und die ihnen entsprechenden Formen. 112. Wenn eine unendlich weit entfernte gerade Linie den Kegelschnitt Ω_2 berühren soll, so muss dieser eine Parabel sein. Singularitäten, die auf einer Parabel unendlich weit gerückt sind. Die verschiedenen untergeordneten Fälle, mit den ihnen entsprechenden Formen. 113. — Die Gleichung einer Curve der vierten Ordnung lässt sich, im Allgemeinen, 819 verschiedene Mal auf die oben angeführte Form bringen. (Combinatorische Erörterungen: Note) 114. Beweis, dass die 28 Doppel-Tangenten alle reell sein können. 115. Allgemeinste Form in Beziehung auf das Imaginäre. 116. Zu je drei reellen Doppel-Tangenten gehört eine vierte reelle, zu zwei imaginären und einer reellen eine zweite reelle, zu drei imaginären eine vierte imaginäre, zu zwei reellen und einer imaginären eine zweite imaginäre. 117—120. Zusammenstellung aller möglichen Formen. 121. Wenn eine der 28 Doppel-Tangenten imaginär wird, so werden nothwendig zugleich zwölf derselben imaginär. Im Falle eines Doppelpunctes fallen zwölf Doppel-Tangenten paarweise zusammen, indem sie aufhören, eigentliche Doppel-Tangenten zu sein. Schema der 140 Combinationen dieses Falles. Wenn eine der übrigbleibenden Doppel-Tangenten imaginär ist, so sind wenigstens acht imaginär. 122. Wenn die Curve zwei Doppelpuncte hat, so hat sie nur noch acht eigentliche Doppel-Tangenten; wenn eine von diesen imaginär ist, so sind es deren wenigstens vier. Wie viele der 28 Doppel-Tangenten können überhaupt imaginär sein? 123. Die vier Berührungspuncte auf irgend zwei Doppel-Tangenten und die vier Durchschnitte der dreizehn übrigen Paare von Doppel-Tangenten, paarweise zusammengestellt, liegen alle acht auf dem Umfange eines Kegelschnittes. 124.

Zusätzliche Bemerkungen 251