

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

- 1 **Einiges über die Kulturgeschichte der Zahlen 7**
Über die Geschichte der Zahlbezeichnungen – Die Entwicklung des Dezimalsystems – Zur Geschichte des Zahlbegriffs
- 2 **Natürliche Zahlen und die Rechenregeln für nichtnegative Zahlen 18**
Die Grundregeln des Rechnens mit nichtnegativen Zahlen – Einige Folgerungen aus den Grundrechenregeln – Die Potenz – Übungen
- 3 **Dezimalzahlen und ihre Anordnung 23**
Zulässige und unzulässige Dezimalzahlen – Die Anordnung der Dezimalzahlen – Der Satz von der oberen Grenze – Übungen
- 4 **Die Arithmetik der abbrechenden Dezimalzahlen 30**
Vorbemerkungen über das Rechnen mit abbrechenden Dezimalzahlen – Definitionen der Summe und des Produkts – Nachweis der Rechengesetze – Die Division in \mathbb{E} – Übungen
- 5 **Arithmetik der nichtnegativen reellen Zahlen 37**
Schlichte Folgen – Die Rechenoperationen für beliebige Dezimalzahlen – Nachweis der Rechengesetze – Die Differenz – Rechnen mit Näherungen – Übungen
- 6 **Quotienten, Bruchrechnung und rationale Zahlen 43**
Existenz des Quotienten – Bruchrechnung und rationale Zahlen – Periodische Dezimalzahlen – Übungen
- 7 **Beginnende Analysis – Unendliche Reihen, Potenzen und Logarithmen 49**
Unendliche Reihen – Der Wettlauf des Achilles mit der Schildkröte – Ein Zwischenwertsatz mit Anwendungen – Potenzen mit beliebigem Exponenten – Erweiterung auf den Fall irrationaler Exponenten – Die Exponentialfunktion – Logarithmen – Interpolation – Übungen
- 8 **Rechenalgorithmen 67**
Der Divisionsalgorithmus – Veranschaulichung durch Flußdiagramme – Der g-adische Algorithmus – Der CANTOR'sche Algorithmus – Ein allgemeiner Algorithmus zur Lösung der Gleichung $f(x) = c$ – Iterationsverfahren – Übungen
- 9 **Negative Zahlen 89**
Allgemeines über negative Zahlen – Ringerweiterungen – Konsequenzen aus der Existenzannahme einer Ringerweiterung – Konstruktion der Ringerweiterung – Nachweis der Rechengesetze des Axiomensystems I – Der Körper der reellen Zahlen – Erweiterungen der Potenzen und Logarithmen – Einiges über die internen Vorgänge in Computern – Übungen

- 10 Größenbereiche und Großengruppen 112**
Vorbetrachtungen und Beispiele – Das Axiomensystem für Größenbereiche und einfache Folgerungen – Größendifferenz – Vervielfachung mit natürlichen Zahlen – Dichtheit und Teilbarkeit – Lückenlose Größenbereiche – Großengruppen – Übungen
- 11 Reelle Zahlen als Maßzahlen und Operatoren 125**
Maßzahlen – Der Hauptsatz über die Größenmessung in lückenlosen Größenbereichen – Isomorphie lückenloser Größenbereiche und Großengruppen – Operatoren – Reelle Operatoren – Übungen
- 12 . Klassische Wege zu den reellen Zahlen 142**
Der Aufbau von DEDEKIND – Der Aufbau mittels Fundamentalfolgen – Intervallschachtelungen – Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen – Logarithmus als Isomorphismus – Abschließende Bemerkung zum Zahlbegriff
- Lösungen der Übungen 153**
- Anhang Aufbau des Systems der natürlichen Zahlen 159**
Allgemeine Bemerkungen zur Begründung der Arithmetik – Zählreihen – Isomorphie der Zählreihen – Existenz einer Zählreihe – Anordnung der Zählreihe – Abzählungen endlicher Mengen – Kardinaler und ordinaler Aspekt der natürlichen Zahlen – Arithmetik der natürlichen Zahlen.
- Erläuterungen zur Terminologie 175**
- Literatur 178**
- Sachverzeichnis 179**