

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Nombres cardinaux.

CHAPITRE I.

LES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ENSEMBLES.

	Pagos.
1. Exemples d'ensembles.....	1
2. Éléments d'un ensemble.....	1
3. Ensembles d'ensembles.....	2
4. Les sous-ensembles.....	4
5. La somme, le produit et la différence d'ensembles.....	5
6. Les propriétés de la somme, du produit et de la différence d'ensembles.....	7
7. Les complémentaires et ses propriétés.....	10
8. La fonction caractéristique d'un ensemble et ses propriétés.....	12
9. Les limites d'une suite infinie d'ensembles.....	13
10. Les images des ensembles et leurs propriétés.....	16

CHAPITRE II.

LES PUISSANCES ET LES NOMBRES CARDINAUX.

11. La notion de puissance.....	19
12. Correspondance biunivoque. Ensembles de même puissance.....	21
13. Les propriétés de la relation \sim	24
14. Exemples d'ensembles de même puissance.....	25
15. Démonstration d'existence des ensembles infinis de puissances différentes.....	28
16. La somme de deux nombres cardinaux.....	30
17. Le produit de deux nombres cardinaux.....	33
18. La puissance de nombres cardinaux.....	36
19. Les propriétés des puissances des nombres cardinaux.....	37

CHAPITRE III.

LES ENSEMBLES DÉNOMBRABLES.

20. Les ensembles dénombrables et effectivement énumérables.....	41
21. L'addition des ensembles dénombrables.....	44
22. Le produit $\aleph_0 \aleph_0$	49
23. Les ensembles contenant un sous-ensemble dénombrable.....	50

	Pages.
24. Les ensembles infinis et les ensembles finis.....	52
25. Les propriétés fondamentales des ensembles infinis ..	54
26. La dénombrabilité des intervalles, n'empiétant pas les uns sur les autres.	57
27. La dénombrabilité de l'ensemble des suites finies de nombres rationnels.....	59
28. La dénombrabilité de l'ensemble de nombres algébriques. La puissance de l'ensemble de nombres transcendants.....	61

CHAPITRE IV.

LES ENSEMBLES DE PUISSANCE DU CONTINU.

29. Les ensembles de puissance c . Les formules pour $c + \aleph_0$, $c + n$, $c - \aleph_0$.	66
30. La somme $c + c$. Le produit $n \cdot c$ et $\aleph_0 \cdot c$	67
31. La formule $cc = c$ et son interprétation géométrique.....	69
32. L'impossibilité d'une application biunivoque et continue du plan sur une droite.....	72
33. La formule $c^{\aleph_0} = c$	77
34. La formule $2^{\aleph_0} = c$	76
35. La formule $\aleph_1^{\aleph_0} = c$	78

CHAPITRE V.

LES INÉGALITÉS POUR LES NOMBRES CARDINAUX.

36. Les signes $>$ et $<$ entre les nombres cardinaux. Les propriétés fondamentales des inégalités.....	81
37. L'inégalité $2^m > m$	84
38. L'ensemble de puissance 2^c . Le problème et l'hypothèse du continu....	86
39. La formation d'une suite infinie croissante de puissances.....	87
40. Le théorème de Banach.....	90
41. Le théorème de Cantor-Bernstein.....	93
42. Les conséquences du théorème de Cantor-Bernstein.....	95
43. La puissance de l'ensemble de toutes les fonctions continues.....	100

CHAPITRE VI.

L'AXIOME DU CHOIX ET SES APPLICATIONS.

44. L'axiome du choix. Le point de vue idéaliste et empiriste.....	103
45. Exemples.....	109
46. L'axiome du choix pour une infinité dénombrable d'ensembles.....	111
47. Le théorème sur la puissance de la somme d'ensembles.....	112
48. L'équivalence de différentes définitions des ensembles finis.....	115
49. Les propriétés des ensembles non dénombrables.....	117
50. La somme d'une série infinie de nombres cardinaux.....	118
51. Les exemples des séries infinies de nombres cardinaux.....	122
52. Extension de la notion d'une somme de nombres cardinaux.....	126
53. Le produit infini de nombres cardinaux.....	126
54. L'extension du produit de nombres cardinaux.....	130
55. Le théorème de J. König.....	131
56. Le principe général du choix. L'axiome de M. Hilbert.....	136

DEUXIÈME PARTIE.

Nombres ordinaux.

CHAPITRE VII.

LES TYPES D'ORDRE.

	Pages.
57. Ensembles ordonnés. Exemples.....	139
58. Ensembles semblables. Les types d'ordre.....	141
59. Les coupures. Les sauts, les lacunes; densité, continuité.....	143
60. Les propriétés caractéristiques du type ω	143
61. Les propriétés caractéristiques du type η	145
62. Les types d'ordre dénombrables.....	147
63. Remplissage des lacunes d'un ensemble ordonné.....	148
64. Les propriétés caractéristiques du type λ	151

CHAPITRE VIII.

OPÉRATIONS SUR LES TYPES D'ORDRE.

65. La somme de deux types d'ordre.....	154
66. Les séries infinies de types d'ordre.....	157
67. La somme d'un ensemble quelconque de types d'ordre.....	158
68. Le produit de deux types d'ordre.....	159

CHAPITRE IX.

LES ENSEMBLES BIEN ORDONNÉS.

69. La définition de bon ordre. Exemples.....	162
70. Le principe d'induction transfinie.....	163
71. L'application semblable d'ensembles bien ordonnés.....	165
72. Le théorème fondamental sur les ensembles bien ordonnés.....	167
73. Les nombres ordinaux transfinis.....	170
74. Les ensembles de nombres transfinis.....	171

CHAPITRE X.

L'ARITHMÉTIQUE DES NOMBRES ORDINAUX.

75. La somme de deux nombres ordinaux.....	174
76. Les restes de nombres ordinaux.....	176
77. Les nombres ordinaux indécomposables.....	178
78. La décomposition de nombres ordinaux en termes indécomposables...	180
79. Les limites de suites transfinites de nombres ordinaux.....	184
80. La somme d'une série transfinie de nombres ordinaux.....	186
81. Le produit de nombres ordinaux.....	188
82. Les propriétés du produit de deux nombres ordinaux.....	189
83. La division de nombres ordinaux.....	190
84. Quelques propriétés des nombres indécomposables...	192
85. La décomposition d'un nombre ordinal en facteurs premiers.....	195

	Pages.
86. La puissance des nombres ordinaux.....	196
87. Les puissances du nombre ω et les nombres indécomposables.....	200
88. La forme normale de nombres ordinaux.....	201
89. Les nombres ϵ de G. Cantor.....	203

CHAPITRE XI.

LES CLASSES DE NOMBRES ORDINAUX ET LES ALEPHS.

90. Les nombres des classes I et II.....	205
91. Le nombre \aleph_1 et ses propriétés.....	207
92. L'induction transfinie pour les nombres des classes I et II.....	211
93. Les classes de nombres ordinaux. Les nombres initiaux. Les alephs... ..	213
94. La démonstration d'existence de nombres \aleph_α	214
95. La succession des alephs.....	216
96. Les propriétés de la somme et du produit des alephs.....	217
97. Les puissances des alephs.....	219
98. La soustraction des alephs.....	222
99. Les nombres initiaux réguliers et singuliers.....	224

CHAPITRE XII.

LE THÉORÈME DE M. ZERMELO ET SES APPLICATIONS.

100. La construction d'un ensemble bien ordonné dont la puissance n'est ni inférieure ni supérieure à celle de l'ensemble donné.....	228
101. La démonstration du théorème de M. Zermelo.....	230
102. L'équivalence de l'axiome du choix, du théorème de M. Zermelo et de la trichotomie.....	232
103. L'application du théorème de M. Zermelo à la théorie des nombres cardinaux.....	233