

# Inhalt

## 1 Affine Inzidenzebenen

1.1	Definition und erste Eigenschaften . . . . .	11
1.2	Kollineationen und Dilatationen . . . . .	13
1.3	Algebraisierung der affinen Inzidenzebenen durch Ternärkörper . . . . .	18
1.4	Ergänzungen . . . . .	26
1.4.1	Affine Koordinatenebenen . . . . .	26
1.4.2	Endliche affine Inzidenzebenen . . . . .	26
1.4.3	Ein Modell der Ordnung 3 . . . . .	27
1.4.4	Projektive Inzidenzebenen . . . . .	29
1.4.5	Projektive Erweiterung einer affinen Ebene . . . . .	29
1.4.6	Schlitzen einer projektiven Ebene . . . . .	30
1.4.7	Hinweis auf nichtdesarguessche Ebenen . . . . .	31
1.4.8	Axiale Kollineationen . . . . .	32

## 2 Translationsebenen

2.1	Der kleine Satz von Desargues und die Gruppe der Translationen . . . . .	35
2.2	Der Schiefkörper der spurtreuen Endomorphismen der Translationsgruppe . . . . .	38
2.3	Das Fano-Axiom; Mittelpunkte und Punktspiegelungen . . . . .	45
2.3.1	Das Fano-Axiom . . . . .	45
2.3.2	Mittelpunkte . . . . .	46
2.3.3	Punktspiegelungen . . . . .	48
2.4	Algebraisierung der Translationsebenen . . . . .	50
2.4.1	Addition in $\mathbf{K}$ . . . . .	50
2.4.2	Zerlegung der ternären Verknüpfung und Multiplikation in $\mathbf{K}$ . . . . .	51
2.5	Ergänzungen . . . . .	56
2.5.1	Darstellung der Translationen . . . . .	56
2.5.2	Der Kern eines Quasikörpers . . . . .	56
2.5.3	Streckungsfaktoren und Strahlensatz . . . . .	59

## 3 Desarguessche Ebenen

3.1	Der Satz von Desargues und seine algebraischen Äquivalente . . . . .	61
3.2	Der Satz von Pappus und die Kommutativität der Multiplikation . . . . .	66
3.3	Der Satz von Desargues als Folge des Satzes von Pappus . . . . .	67
3.4	Die affine Ebene über $\mathbf{Q}$ . . . . .	69
3.5	Ergänzungen . . . . .	73

3.5.1	Skalen	73
3.5.2	Affinitäten	74
3.5.3	Endliche desarguessche Ebenen	77
3.5.4	Die projektiven Sätze von Desargues	77

#### **4 Anordnung**

4.1	Seiteneinteilung und schwache Anordnung	78
4.2	Schwach angeordnete desarguessche Ebenen	82
4.3	Zwischenbeziehungen und angeordnete Ebenen	86
4.4	Lineare Anordnung	91
4.5	Angeordnete desarguessche Ebenen	96
4.6	Behandlung von Anordnungseigenschaften im Unterricht	100
4.7	Ergänzungen	105
4.7.1	Beispiel 1	105
4.7.2	Beispiel 2	105
4.7.3	Anzahl der Punkte auf einer Geraden	105
4.7.4	Einfluß der Anordnung auf Inzidenzeigenschaften	106
4.7.5	Invarianz der Zwischenfunktion bei Zentralprojektion paralleler Geraden	106

#### **5 Vervollständigung zur affinen Ebene über $\mathbb{R}$**

5.1	Archimedische Anordnung	108
5.2	Vollständigkeit	111
5.3	Affine Geometrie mit expliziter Verwendung von Zahlen	112

#### **6 Orthogonalitätsrelationen in Translationsebenen**

6.1	Einführung der Orthogonalität	117
6.2	Die Orthogonalitätskonstante	123
6.3	Anfänge der euklidischen Elementargeometrie	126

#### **7 Euklidische Spiegelungsgeometrie**

7.1	Spiegelungen	131
7.2	Die Bewegungsgruppe	133
7.3	Klassifikation der Bewegungen	139

#### **8 Vervollständigung des Axiomensystems und Algebraisierung der euklidischen Ebenen**

8.1	Das Winkelhalbierenden-Axiom	144
8.2	Hinzunahme des euklidischen Anordnungsaxioms	147

8.3	Längenmessung	151
8.4	Winkelmessung	155
8.4.1	Maßzahlen orientierter Winkel	156
8.4.2	Winkelhalbierung und Orientierung der Ebene	160
8.4.3	Größenbeziehungen zwischen Winkelmaßzahlen	162
8.4.4	Das Bogenmaß	166
8.5	Ergänzungen	169
8.5.1	Winkelfelder orientierter Winkel	169
8.5.2	Bogenmaße über beliebigen euklidischen Körpern	170
<b>9 Topologisierung der Ebene. Polygone</b>		
9.1	Angeordnete Ebenen als topologische Räume	176
9.2	Polygone	181
<b>10 Zerlegungsgleichheit. Ergänzungsgleichheit</b>		
10.1	Zerlegungsgleichheit	188
10.2	Ergänzungsgleichheit	191
10.3	Größenvergleich von Polygonen	195
<b>11 Flächeninhaltsmaße</b>		
11.1	Konstruktion eines Inhaltsmaßes, Folgerungen	200
11.2	Auswirkungen des archimedischen Axioms	205
<b>Hinweise zur Lösung der Aufgaben</b>		210
<b>Literatur</b>		225
<b>Sachverzeichnis</b>		228