

# Inhalt

## 1 Affine Inzidenzebenen

1.1	Definition und erste Eigenschaften	11
1.2	Kollineationen und Dilatationen	13
1.3	Algebraisierung der affinen Inzidenzebenen durch Ternärkörper	18
1.4	Ergänzungen	26
1.4.1	Affine Koordinatenebenen	26
1.4.2	Endliche affine Inzidenzebenen	26
1.4.3	Ein Modell der Ordnung 3	27
1.4.4	Projektive Inzidenzebenen	29
1.4.5	Projektive Erweiterung einer affinen Ebene	29
1.4.6	Schlitzen einer projektiven Ebene	30
1.4.7	Hinweis auf nichtdesarguessche Ebenen	31
1.4.8	Axiale Kollineationen	32

## 2 Translationsebenen

2.1	Der kleine Satz von Desargues und die Gruppe der Translationen	35
2.2	Der Schiefkörper der spurtreuen Endomorphismen der Translationsgruppe	38
2.3	Das Fano-Axiom; Mittelpunkte und Punktspiegelungen	45
2.3.1	Das Fano-Axiom	45
2.3.2	Mittelpunkte	46
2.3.3	Punktspiegelungen	48
2.4	Algebraisierung der Translationsebenen	50
2.4.1	Addition in $\mathbf{K}$	50
2.4.2	Zerlegung der ternären Verknüpfung und Multiplikation in $\mathbf{K}$	51
2.5	Ergänzungen	56
2.5.1	Darstellung der Translationen	56
2.5.2	Der Kern eines Quasikörpers	56
2.5.3	Streckungsfaktoren und Strahlensatz	59

## 3 Desarguessche Ebenen

3.1	Der Satz von Desargues und seine algebraischen Äquivalente	61
3.2	Der Satz von Pappus und die Kommutativität der Multiplikation	66
3.3	Der Satz von Desargues als Folge des Satzes von Pappus	67
3.4	Die affine Ebene über $\mathbf{Q}$	69
3.5	Ergänzungen	73

3.5.1	Skalen	73
3.5.2	Affinitäten	74
3.5.3	Endliche desarguessche Ebenen	77
3.5.4	Die projektiven Sätze von Desargues	77

#### **4 Anordnung**

4.1	Seiteneinteilung und schwache Anordnung	78
4.2	Schwach angeordnete desarguessche Ebenen	82
4.3	Zwischenbeziehungen und angeordnete Ebenen	86
4.4	Lineare Anordnung	91
4.5	Angeordnete desarguessche Ebenen	96
4.6	Behandlung von Anordnungsseigenschaften im Unterricht	100
4.7	Ergänzungen	105
4.7.1	Beispiel 1	105
4.7.2	Beispiel 2	105
4.7.3	Anzahl der Punkte auf einer Geraden	105
4.7.4	Einfluß der Anordnung auf Inzidenzeigenschaften	106
4.7.5	Invarianz der Zwischenfunktion bei Zentralprojektion paralleler Geraden	106

#### **5 Vervollständigung zur affinen Ebene über $\mathbb{R}$**

5.1	Archimedische Anordnung	108
5.2	Vollständigkeit	111
5.3	Affine Geometrie mit expliziter Verwendung von Zahlen	112

#### **6 Orthogonalitätsrelationen in Translationsebenen**

6.1	Einführung der Orthogonalität	117
6.2	Die Orthogonalitätskonstante	123
6.3	Anfänge der euklidischen Elementargeometrie	126

#### **7 Euklidische Spiegelungsgeometrie**

7.1	Spiegelungen	131
7.2	Die Bewegungsgruppe	133
7.3	Klassifikation der Bewegungen	139

#### **8 Vervollständigung des Axiomensystems und Algebraisierung der euklidischen Ebenen**

8.1	Das Winkelhalbierenden-Axiom	144
8.2	Hinzunahme des euklidischen Anordnungsaxioms	147

8.3	Längenmessung	151
8.4	Winkelmessung	155
8.4.1	Maßzahlen orientierter Winkel	156
8.4.2	Winkelhalbierung und Orientierung der Ebene	160
8.4.3	Größenbeziehungen zwischen Winkelmaßzahlen	162
8.4.4	Das Bogenmaß	166
8.5	Ergänzungen	169
8.5.1	Winkelfelder orientierter Winkel	169
8.5.2	Bogenmaße über beliebigen euklidischen Körpern	170
<b>9 Topologisierung der Ebene. Polygone</b>		
9.1	Angeordnete Ebenen als topologische Räume	176
9.2	Polygone	181
<b>10 Zerlegungsgleichheit. Ergänzungsgleichheit</b>		
10.1	Zerlegungsgleichheit	188
10.2	Ergänzungsgleichheit	191
10.3	Größenvergleich von Polygonen	195
<b>11 Flächeninhaltsmaße</b>		
11.1	Konstruktion eines Inhaltsmaßes, Folgerungen	200
11.2	Auswirkungen des archimedischen Axioms	205
<b>Hinweise zur Lösung der Aufgaben</b>		210
<b>Literatur</b>		225
<b>Sachverzeichnis</b>		228