

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung: Gegenstand der algebraischen Geometrie — Abgrenzung gegenüber der analytischen Geometrie und der Differentialgeometrie — besonderer Zweck der vorliegenden Bearbeitung — Voraussetzungen.

§ 1. Der Polynomring.

111. *Zahlkörper.* Algebraische Abgeschlossenheit, Stetigkeit, Fundamentalsatz der Algebra — der komplexe Zahlkörper (1—3).
112. *Ringerweiterungen.* Ring, Integritätsbereich (1) — P -Ring, Adjunktion von Unbestimmten oder Variablen (2—3) — Formen, Grad, Untergrad (4) — reduzibel, irreduzibel, absolut irreduzibel (5) — euklidischer Algorithmus, GGT, teilerfremd (6—9) — Teilbarkeit eines Produktes (10) — *ZPE*-Satz (11—12) — *ZPE*-Satz in $R[x]$ (13) — primitive Polynome (14—16) — Elimination (17) — Taylorsche Formel, Ableitungen, Differentiationsregeln (18—20) — Eulersche Identität (21).
113. *Körpererweiterungen.* Quotientenkörper, Ring- und Körperadjunktion, der rationale Funktionenkörper (1—2) — Grad (3).
114. *Potenzreihenringe.* Das Rechnen mit formalen Potenzreihen (1) — Untergrad (2) — mehrere Variable (3—4) — Einheiten (5) — Reduzierung von Nichteinheiten (6) — regulär (7) — der Weierstraßsche Vorbereitungssatz (8—9) — *ZPE*-Satz (10—11).
115. *Moduln und Ideale in kommutativen Ringen.* Modul, Operator, Ideal (1—2) — Nullideal, Einheitsideal (3) — Unterideal usw. (4) — Basis, Hauptideal, Teilerkette (5) — O -Ringe (6) — U -Ringe (7) — Basissatz (8—9) — Hilbertscher Basissatz (10—11) — Klasseneinteilung mod \mathfrak{a} , Restklasse (12) — Rechnen mit Kongruenzen (13) — Restklassenring (14) — Homomorphie (15) — Isomorphie (16) — Homomorphiesatz (17) — 1. und 2. Isomorphiesatz (18—19) — Idealkörper, Operationen mit Idealen (20—26) — Ideale des Restklassenringes (27—29).
116. *Algebraische und transzendente Erweiterungen eines Körpers.* Lineare Abhängigkeit, algebraische und transzendente Größen (1—2) — algebraische Erweiterung (3—4) — Basis (5) — Isomorphie zwischen $R(\alpha)$ und $R[x]/\mathfrak{a}$ (6) — primitive Elemente (7) — Konstruktion algebraischer Erweiterungskörper, Berechnung von Wurzeln (8—9) — sukzessive algebraische Erweiterungen (10) — endliche Erweiterung, Basis (11—12) — Satz von der Existenz eines primitiven Elementes (13—15) — unendliche algebraische und transzendente Erweiterungen (16) — Transzendenzgrad, dessen Invarianz (17—19) — gemischte transzendente und algebraische Erweiterungen (20—22) — Konstruktion von isomorphen Restklassenkörpern (23—24) — algebraische Unabhängigkeit von Polynomen (25—26).

§ 2. Nullstellentheorie der Polynomideale.

121. *Nullstellen und Nullstellengebilde (NG) eines P -Ideals.* Definition von Nullstelle und NG (1—2) — Nullstellen eines Hauptideals (3) — lineare homogene Transformationen der Variablen (4—6) — P -Ideale mit demselben NG (7) — Einheitsideal (8).
122. *Eliminationstheorie.* $\alpha = (f, g)$ in $K[x]$, Ermittlung des GGT durch Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten (1—2) — Kriterium für die Existenz eines GGT (3) — Sylvestersche Determinante, Resultante (4) — Eigenschaften der Resultante (5) — Zusammenfassung (6) — $\alpha = (f_1, \dots, f_s)$ in $K[x]$ (7—8) — Eliminationsideal (9—12) — Ideale in $K[x_1, \dots, x_n]$, Eliminationsideale (13—16) — der Hilbertsche Nullstellensatz (17).
123. *Geometrische Veranschaulichung der Elimination.* Nullstellen und NG, der affine Raum \mathbb{R}_n , Rolle der Anschauung (1) — NG von \mathfrak{b}_1 ist Projektion des NG von α (2) — unendlich ferne Punkte (3) — Projektionszentrum (4) — Bedeutung der Transformation in 121.4, allgemeine Projektionen (5—6) — die NG von $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \dots$ (7) — Dimension (8).
124. *Homogene Variable. Projektive Räume.* Fehlen der unendlichfernen Punkte im affinen Raum (1—3) — Übergang zu homogenen Variablen (4) — H -Ring, H -Ideale (5) — H -Basis (6) — das äquivalente H -Ideal (7—8) — Beispiel einer H -Basis (9) — Nullstellen, triviale Nullstelle, T -Ideale (10) — der projektive Raum (11) — Abbildung von \mathbb{R}_n auf \mathbb{P}_n (12) — Vorteile der homogenen Arbeitsmethode (13).
125. *Resultanten von H -Idealen.* Anwendung der Eliminationstheorie auf H -Ideale (1—2) — Resultantenideale (3) — allgemeine Koeffizienten (4) — Homogenität (5) — Hurwitzsche Bedingung (6) — Unabhängigkeit von der Reihenfolge der Variablen (7) — τ ist Primideal (8) — $\tau = (0)$ wenn $s < n$ (9) — $\mathfrak{b}_{s+1} = (0)$ (10) — Fall $s = n$, Resultante (11) — Beispiele (12) — Vertauschung der Variablen (13) — Macaulaysche Darstellung der Resultante, $H(t; n)$ (14) — $D(t; n)$; reduziert hinsichtlich x_0, \dots, x_n . (15) — Definition von $D(t; n)$, führendes Glied (16) — Spezialisierungen, Grad der Resultante (17) — Koeffizient von α_n^{Mn} in τ und $D(t; n)$ (18—19) — Außerwesentlicher Faktor (20) — Macaulaysche Darstellung (21) — Eigenschaften der Resultante (22) — Invarianz (23) — Hilfssatz (24) — Beweis (25) — isobare Eigenschaft (26) — weitere Eigenschaften (27) — Beispiel (28).
126. *Fortsetzung der Idealtheorie in kommutativen Ringen.* Primideal, Primidealketten (1—2) — nilpotent, primär, Primärideal (3) — primäre Ringe (4) — zugehöriges Primideal, Kriterien (6—7) — reduzible, irreduzible Ideale (8) — irreduzible Ideale (9) — reduzible Primärideale (10) — Darstellungssatz (11—12) — verkürzbar, Primärkomponenten (13—14) — reduzierte Darstellung (15) — Eindeutigkeitsatz (16) — Hilfssatz (17) — Beweis zu 16 (18—19) — relativ prime Ideale (20) — isoliertes Komponentenideal (21).
127. *Algebraische Mannigfaltigkeiten.* Notwendigkeit des neuen Begriffes AM (1) — allgemeine Sätze über NG und AM (2—5) — maximales Ideal (6) — irreduzible NG (7) — eindeutige Zuordnung von Primidealen und irreduziblen NG (8) — irreduzible AM (9) — NG eines Primärideals (10) — Beispiele (11—14) — benachbarte Punkte (11—12) — vielfache Punkte

(13) — Verallgemeinerung auf mehr Dimensionen (14) — AM von Primär-idealen (15) — Multiplizität eines Primärideals (16) — Beweis des Jordan-Hölderschen Satzes (17—20) — Multiplizität eines r -fachen Punktes (21) — Charakterisierung durch Multiplizität (22—23) — AM (α) (24) — Eindeutigkeit (25).

§ 3. Dimensionstheorie der Polynomideale.

131. *Dimension und Rang eines (inhomogenen) P -Ideals.* Restklassenkörper $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ eines Primideals (1) — Transzendenzgrad von $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ über K = Dimension von \mathfrak{p} ; $d \leq n$; algebraisch abhängige Größen in $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ über K (2) — Nullideal, Einheitsideal (3) — nulldimensionale Primideale, Basis, Nullstelle (4) — Rang $r = n - d$ (5) — „unabhängig“ in bezug auf ein P -Ideal (6) — Dimension = Maximalzahl unabhängiger Variablen (7) — Dimension von $[\alpha, \mathfrak{b}]$, eines Primärideals (8) — Dimension von α = größte Dimension der zugehörigen Primideale; Rang (9) — gemischt, ungemischt (10) — $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ als endlicher algebraischer Erweiterungskörper von K (x_1, \dots, x_d) (11) — Erweiterungsideal $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}\mathfrak{o}^*$ in $\mathfrak{o}^* = K(x_1, \dots, x_d)[x_{d+1}, \dots, x_n]$ (12) — $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{q}\mathfrak{o}^*$ (13) — $\alpha^* = [\mathfrak{q}_1^*, \dots, \mathfrak{q}_t^*]$ (14) — Dimension eines Teilers, Vielfachen (15).
132. *Geometrische Interpretation der Dimension. H -Ideale.* Dimension von α = Dimension des $NG(\alpha)$ im topologischen Sinn (1) — die Mannigfaltigkeit der Nullstellen von \mathfrak{p} hängt in der Umgebung einer festen Nullstelle von d freien Parametern ab (2) — v. d. Waerdensche allgemeine Nullstelle; eindeutige und stetige Abbildung auf die Umgebung eines Punktes im \mathbb{R}_d (3) — allgemeine P -Ideale; gemischte Ideale mit ungemischtem NG (4) — H -Ideale (5) — homogene Dimension (6) — Rang eines H -Ideals (7) — nulldimensionale H -Ideale, T -Ideale, Einheitsideal, Nullideal (8) — äquivalente H -Ideale, deren Rang, Dimension, reduzierte Darstellung (9) — Invarianz der Dimension gegenüber linearen und birationalen Transformationen (10).
133. *Die Primbasis.* Basis eines nulldimensionalen Primideals (1) — Charakterisierung der Basispolynome p_1, p_2 (2) — sukzessive Ermittlung der Primbasis (3—4) — Zusammenfassung für nulldimensionale Primideale (5) — Abhängigkeit der Primbasis von den Variablen und deren Anordnung (6) — Primideale höherer Dimension (7—8) — Monoid, monoidale Primbasis (9) — H -Ideale (10) — Dimension von $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ (11) — Dimension der Teiler eines Primideals, Primidealkette (12) — Dimension von (α, \mathfrak{p}) (13) — Dimension von (\mathfrak{p}, φ) bei H -Idealen (14) — Dimension von (α, φ) bei H -Idealen, zugehörige Primideale, $s \geq r$ (15) — Schnitt einer AM der Dimension d mit einem allgemeinen linearen Unterraum der Dimension r (16) — Rang der Matrix (φ'_{ik}) (17) — beliebige Polynome aus \mathfrak{p} (18) — $r \leq s$, keine obere Schranke für s (19) — Differentialkongruenzen mod \mathfrak{p} (20) — Beweis (21).
134. *Polaren, Tangenten und Tangentialräume.* Primhauptideale (1) — Schnitt mit einer Geraden (2) — Anzahl, Multiplizität der Schnittpunkte, Tangente (3) — Polare (4) — Berührungspunkte der von $\{\xi\}$ ausgehenden Tangenten (5) — Tangentialhyperebene im Punkt $\{\xi\}$ (6) — singuläre Punkte (7) — $D(\varphi)$ (8) — Tangenten im engeren Sinn, Tangentenkegel (9) — Ausdehnung auf homogene Primideale des Ranges r , Tangentialraum (10) — Bedingung für nicht singuläre Punkte (11) — singuläre Punkte, $D(\mathfrak{p})$ (12).

- 135. Ideale der Hauptklasse.** Hauptklassenideal, Hauptideal, vollständiger Schnitt (1) — jedes nulldimensionale inhomogene Primideal gehört zur Hauptklasse (2) — jedes ungemischte P -Ideal des Ranges 1 ist Hauptideal und umgekehrt (3) — Umformung der Basis (4—5) — jedes Hauptklassenideal ist ungemischt, Beweis für H -Ideale (6—7) — Hilfssatz (8) — Beweis für inhomogene P -Ideale, Beweis $s \geq r$ (9—11) — jede Potenz eines Hauptklassenideals ist ungemischt (12).
- 136. Ganze algebraische Größen.** Definition einer algebraisch ganzen Größe (1) — ist α algebraisch ganz über R , β über $R[\alpha]$, so auch β über R (2—3) — mit α und β sind auch $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ algebraisch ganz über R (4) — ganze Abschließung, ganz abgeschlossen (5) — Existenz einer endlichen Modulbasis von S über R (6—8) — Normierungssatz (9—10) — Anwendung auf die Restklassenringe von P -Idealen; jeder ZPE -Integritätsbereich ist ganz abgeschlossen (11) — Führerideal und dessen Darstellungen (12—13) — das adjungierte Ideal (14) — Beziehungen zwischen Erweiterungs- und Verengungsideal (15) — Hilfssätze (16—19) — symbolische Potenzen (20) — Primärideale von minimalen Primidealen in ganz abgeschlossenen Integritätsbereichen (21) — Beweis der Formel $\mathfrak{p}^{(\sigma)} : \mathfrak{p}^{(\sigma)} = \mathfrak{p}^{(e-\sigma)}$ (22) — erster Hauptidealsatz (23) — Quotientendarstellung von Idealen mit minimalen Primärkomponenten (24).
- 137. Waerdensche Nullstellen. Primidealketten.** Restklassenring und Restklassenkörper von \mathfrak{p} (1) — eindeutige Zuordnung $\mathfrak{p} \leftrightarrow R_{\mathfrak{p}} \leftrightarrow \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ (2) — Homomorphie $R_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} R_{\mathfrak{p}'}$, wenn $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ (3) — Waerdensche Nullstelle, allgemeine Nullstelle (4) — relationstreue Spezialisierung (5) — Primidealkettensatz (6—8) — Beweis (9) — pseudogemischte Ideale (10) — 2. Hauptidealsatz (11) — Verschiedenheit der Eliminationsideale $\overline{\mathfrak{p}}_1$ und $\overline{\mathfrak{p}}_2$, wenn $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ (12—13) — supernormale Primideale (14) — verschärfter 2. Hauptidealsatz, perfekte Ideale (15—16) — Schnittsatz für pseudogemischte Ideale (17—18).
- 138. Potenzreihenideale.** Übergang vom P -Ring zum Potenzreihenring (1—3) — $\widehat{\mathfrak{a}} = \widehat{\mathfrak{a}}_0$ (4) — $\mathfrak{a} \widehat{\cap} \mathfrak{b} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^{\rho}) = \mathfrak{a}_0$ (5—6) — Satz von Krull über das KGV aller symbolischen Potenzen eines Primideals (7—8) — Satz von M. Noether: $\mathfrak{a} \widehat{\cap} \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_0$ (9) — Zweige eines Primideals (10—11) — Potenzreihenringe sind O -Ringe (12) — Dimension eines Potenzreihenideals (13—14) — Dimension einer $AM(\mathfrak{p})$ „im Kleinen“ und „im Großen“ (15).

§ 4. Die Hilbertfunktion.

- 141. Definition und allgemeine Eigenschaften der Hilbertfunktion.** K -Modul der Formen des Grades t in $K[x_0, \dots, x_n]$ (1) — Volumen (2—3) — Formeln für das Volumen $V(t; \mathfrak{a})$ (4) — Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a})$ (5) — Hilbertsche Gleichungen (6) — Postulation (7) — Hilbertfunktion eines inhomogenen H -Ideals; sie ist monoton (8) — Formeln für die Hilbertfunktion (9) — triviale Komponenten (10) — Hilbertfunktion eines nulldimensionalen Ideals (11) — Ordnung = Anzahl der Nullstellen (12) — Hilbertfunktion eines nulldimensionalen Primärideals (13) — Beweis für beliebige nulldimensionale H -Ideale (14) — Hilbertscher Satz, Hilbertsche Koeffizienten, Ordnung (15—16) — Invarianz gegenüber homogenen linearen Transformationen (17).

142. *Formeln für Hilbertfunktionen von Idealen der Hauptklasse.* Hauptideale (1) — 2., 3., ..., r -te Hauptklasse (2—4) — Ordnung eines Hauptklassenideals (5) — Gültigkeit der Formeln für niedere Grade t (6).
143. *Die Hilbertschen Koeffizienten, insbesondere die Ordnung der H -Ideale. Projektionen.* Ordnung von α = Summe der Ordnungen der Primärkomponenten höchster Dimension (1) — Beweis (2) — Verallgemeinerung auf die übrigen Hilbertkoeffizienten (3) — Grad = Ordnung bei Hauptidealen (4) — Ordnung eines Primärideals der Multiplizität μ (5) — Invarianz der Hilbertkoeffizienten gegenüber linearen homogenen Transformationen (6) — $h_0(\alpha, \varphi) = r h_0(\alpha)$, wenn $\alpha : \varphi = \alpha$ (7) — Schnitt einer AM mit einer Hyperebene (8) — Ordnung = Anzahl der Schnittpunkte mit einem linearen Unterraum (9) — Invarianz der Ordnung gegenüber einer allgemeinen Projektion (10) — Projektion eines allgemeinen H -Ideals (11) — Hilbertfunktion des durch ein Ideal α in $K[x_0, \dots, x_n]$ erzeugten Projektionskegels α^* in $K[x_0, \dots, x_n]$ (12) — Analytische Charakterisierung der „allgemeinen“ Lage des Projektionszentrums (13) — Formel für die Hilbertfunktion des projizierten Ideals (14) — Beweis für $h_0(\alpha) = h_0(\bar{\alpha})$ (15) — Dimension von α_x , falls das Projektionszentrum auf der AM (α) liegt (16—18) — Erniedrigung der Ordnung um 1, falls das Projektionszentrum in einem gewöhnlichen Punkt der AM (p) liegt (19) — Beweis (20) — Beispiele, Raumkurven 3. und 4. Ordnung (21).
144. *Sätze über Schnittpunkte und Einbettungsräume.* Der spezielle Bézoutsche Satz (1—2) — perfekte Ideale, vorläufige Definition (3—4) — der allgemeine Bézoutsche Satz (5—6) — allgemeine Gültigkeit im P_2 und P_3 (7) — Ablehnung eines komplizierten Multiplizitätsbegriffes, der die uneingeschränkte Gültigkeit des Bézoutschen Satzes erwirkt (8) — Beispiel eines im perfekten Primideals, wo die Aussage des Bézoutschen Satzes nicht stets erfüllt wird (9—11) — allgemeine Form des Bézoutschen Satzes bei pseudogemischten AM und Anwendungen (12—15) — Einbettungsraum (16) — normale AM (17) — jedes eigentlich eingebettete supernormale Primideal ist normal (18) — Beispiel: Kurve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt (19) — Einbettungssatz (20—21) — rationale allgemeine Nullstelle einer irreduziblen quadratischen Form (22) — Reduzibilitätskriterium (23)

§ 5. Syzygentheorie der H -Ideale.

151. *Matrizen im H -Ring.* Homogene Matrizen (1—2) — Vektoren, Skalare (3) — Operationen mit Matrizen (4—7) — Vektormodul (8) — Basissatz für Vektormoduln (9—10) — Syzygien (11) — rechter und linker Syzygienmodul einer Matrix (12—13) — Minimalbasis (14).
152. *Syzygienketten.* Kette von Syzygienmoduln (1—2) — Syzygienketten von Hauptklassenidealen (3—5) — Syzygienkette von (α, φ) (6—7) — Länge der Syzygienkette in Abhängigkeit vom Rang (8—9) — Aufspaltung einer Syzygie nach einem Hauptklassenideal (10—11) — Länge jeder Syzygienkette $\leq n + 1$ (12) — Triviale Komponenten (13) — Abhängigkeit von der H -Basis (14) — Zusammenhang mit der Hilbertfunktion (15).
153. *Perfekte Ideale.* Definition (1) — H -Ideale der Hauptklasse (2) — Rang n , $n + 1$ (3) — Ungemischtheit (4) — Beispiele imperfekter Ideale (5) — Kriterien für perfekte Ideale (6).

154. *Durch Matrizen dargestellte H -Ideale.* Definition eines Matrizenideals (1) — Satz über Rang und Ungemischtheit (2) — Hilfssatz über Spezialisierungen (3—4) — Beweis des 1. Teiles von 2 (5) — Satz über die Syzygien eines Matrizenideals (6—8) — Beweis des 2. Teiles von 2 (9—10).
155. *Perfekte Raumkurven.* Darstellung der perfekten Raumkurven durch Matrizenideale (1—4) — $s = 1$, Hauptklassenideale (5) — $s = 2$, Ordnung $h_0(a)$ (6) — perfekte Raumkurven 3. Ordnung (7) — imperfekte Raumkurven 3. Ordnung (8) — geometrische Bedeutung des Begriffes „perfekt“ (9). — Noethersche Bedingungen (10—11). — Noetherscher Fundamentalsatz (12—13).

Erklärungen einiger Zeichen und Begriffe.

001. Abkürzungen.

GGT	= größter gemeinsamer Teiler,
KGV	= kleinstes gemeinsames Vielfaches,
R_n	= affiner n -dimensionaler Raum (123),
P_n	= projektiver n -dimensionaler Raum (124),
O -Ring	= Ring mit Teilerkettensatz (115),
U -Ring	= Ring mit Vielfachenkettensatz (115),
P -Ring	= Polynomring,
H -Ring	= homogener Polynomring (124),
P -Ideal	= Polynomideal,
H -Ideal	= homogenes Polynomideal (124),
NG	= Nullstellengebilde (121),
AM	= algebraische Mannigfaltigkeit (127),
ZPE	= eindeutige Zerlegbarkeit in Primelemente.

002. Mengentheoretische Bezeichnungen.

$a \in \mathfrak{M}$	bedeutet: a ist Element der Menge \mathfrak{M} ;
$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}, \mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}$	bedeutet: die Menge \mathfrak{M} ist (eigentliche) Untermenge von \mathfrak{N} ;
$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}, \mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$	bedeutet: \mathfrak{M} ist Untermenge von \mathfrak{N} oder mit \mathfrak{N} identisch;
$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$	bedeutet: Durchschnitt der Mengen \mathfrak{M} und \mathfrak{N} (Menge aller Elemente, die sowohl in \mathfrak{M} wie auch in \mathfrak{N} enthalten sind);
$\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$	bedeutet: Summe der Mengen \mathfrak{M} und \mathfrak{N} (Menge aller Elemente, die in wenigstens einer der Mengen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ enthalten sind);
$\epsilon \subset \subseteq$	bedeutet: Negationen der Zeichen $\epsilon, \subset, \subseteq$;
$\mathfrak{M} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{N}$	bedeutet: homomorphe Abbildung (operationstreu 115.15);
$\mathfrak{M} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{N}$	bedeutet: isomorphe Abbildung (operationstreu 115.15).

003. Einige algebraische Begriffe.

1. *Gruppe:* eine nichtleere Menge von Elementen a, b, c, \dots , für die eine Verknüpfungsoperation erklärt ist, welche jedem geordneten Elementenpaar ein Element derselben Menge zuordnet: $a b = c$. Es gelten die Axiome:
- a) das assoziative Gesetz: $a (b c) = (a b) c$;

b) eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen: $xa = b, ay = b$.

Gilt auch das kommutative Gesetz $ab = ba$, so heißt die Gruppe kommutativ oder abelsch.

2. *Ring (kommutativ)*¹ eine nichtleere Menge von Elementen, für die zwei Verknüpfungsoperationen, Addition und Multiplikation, definiert sind und folgenden Gesetzen genügen:

a) den assoziativen Gesetzen: $a + (b + c) = (a + b) + c, a(bc) = (ab)c$;

b) den kommutativen Gesetzen: $a + b = b + a, ab = ba$;

c) dem Distributivgesetz: $a(b + c) = ab + ac$;

d) der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung: $a + x = b$.

Jeder Ring enthält ein Nullelement, aber nicht notwendig ein Einselement. Ist $ab = 0$, ohne daß ein Faktor null ist, so heißen a, b *Nullteiler*. Ein Ring ohne Nullteiler heißt *Integritätsbereich*. Ist $ab = 1$, ohne daß $a = b = 1$ ist, so heißen a, b *Einheiten*; $b = a^{-1}$ heißt das *inverse* oder *reziproke* Element zu a .

3. *Körper (kommutativ)*¹: ein Ring, der noch der Forderung genügt:

e) der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung $ax = b$ falls $a \neq 0$.

Jeder Körper enthält ein Einselement und keine Nullteiler.

4. *Quotientenring, Quotientenkörper*: Ist R ein Ring, S eine Untermenge von Elementen aus R , welche weder die Null noch Nullteiler enthält und gegenüber der Multiplikation abgeschlossen ist, so bildet die Menge

aller Brüche $\frac{a}{b}$ ($a \in R, b \in S$) den *Quotientenring von R in bezug auf S* ,

symbolisch $\frac{R}{S}$. Ist S die Menge aller Nichtnullteiler von R , so hat man

den *Quotientenring* schlechthin, symbolisch $\frac{R}{R}$. Ist R ein Integritäts-

bereich, so ist $\frac{R}{R}$ ein Körper, der *Quotientenkörper*. Für das Rechnen mit Brüchen gelten die gewöhnlichen Regeln.

¹ Wir haben es hier ausschließlich mit *kommutativen* Ringen und Körpern zu tun.