

INHALTSVERZEICHNIS

BERMERKUNGEN ZU DEN VERWENDETEN BEZEICHNUNGEN

Kapitel 1. Die Folge der Primzahlen (1)

§ 1.1	Teilbarkeit ganzer Zahlen	1
§ 1.2	Primzahlen	2
§ 1.3	Aufstellung des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie	3
§ 1.4	Die Folge der Primzahlen	4
§ 1.5	Einige mit Primzahlen zusammenhängende Fragen	6
§ 1.6	Einige Bezeichnungen	7
§ 1.7	Die logarithmische Funktion	9
§ 1.8	Der Primzahlsatz	10

Kapitel 2. Die Folge der Primzahlen (2)

§ 2.1	Erster Beweis von EUKLIDS zweitem Satz	13
§ 2.2	Weitere Folgerungen aus EUKLIDS Beweis	13
§ 2.3	Primzahlen in gewissen arithmetischen Reihen	14
§ 2.4	Zweiter Beweis von EUKLIDS Satz	15
§ 2.5	FERMATSche und MERSENNEsche Zahlen	16
§ 2.6	Dritter Beweis des Satzes von EUKLID	18
§ 2.7	Weitere Bemerkungen über Formeln für Primzahlen	19
§ 2.8	Ungelöste Primzahlprobleme	21
§ 2.9	Moduln von ganzen Zahlen	21
§ 2.10	Beweis des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie	23
§ 2.11	Ein weiterer Beweis des Fundamentalsatzes	23

Kapitel 3. FAREYreihen und ein Satz von MINKOWSKI

§ 3.1	Definition und einfachste Eigenschaften einer FAREYreihe	25
§ 3.2	Die Äquivalenz der beiden charakteristischen Eigenschaften	26
§ 3.3	Erster Beweis der Sätze 28 und 29	27
§ 3.4	Zweiter Beweis der Sätze	28
§ 3.5	Das Zahlengitter	28
§ 3.6	Einige einfache Eigenschaften des Fundamentalgitters	29
§ 3.7	Dritter Beweis der Sätze 28 und 29	31
§ 3.8	Die FAREYZerschneidung des Kontinuums	32
§ 3.9	Ein Satz von MINKOWSKI	33
§ 3.10	Beweis des Satzes von MINKOWSKI	34
§ 3.11	Folgerungen aus Satz 37	36

Kapitel 4. Irrationalzahlen

§ 4.1	Allgemeines	41
§ 4.2	Zahlen, die als irrational bekannt sind	42
§ 4.3	Der Satz von PYTHAGORAS und seine Verallgemeinerungen	43
§ 4.4	Die Anwendung des Fundamentalsatzes in den Beweisen der Sätze 43–45	44
§ 4.5	Eine historische Zwischenbemerkung	45
§ 4.6	Geometrische Beweise für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{5}$	47
§ 4.7	Einige weitere irrationale Zahlen	49

Kapitel 5. Kongruenzen und Reste

§ 5.1	Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches	52
§ 5.2	Kongruenzen und Restklassen	53
§ 5.3	Elementare Eigenschaften von Kongruenzen	55
§ 5.4	Lineare Kongruenzen	55
§ 5.5	Die EULERSche $\varphi(m)$ -Funktion	57
§ 5.6	Anwendung der Sätze 59 und 61 auf trigonometrische Summen	59
§ 5.7	Ein allgemeines Prinzip	63
§ 5.8	Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks	63

Kapitel 6. Der FERMATSche Satz und Folgerungen

§ 6.1	Der FERMATSche Satz	70
§ 6.2	Einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten	70
§ 6.3	Ein zweiter Beweis für Satz 72	73
§ 6.4	Beweis von Satz 22	73
§ 6.5	Quadratische Reste	74
§ 6.6	Spezialfälle von Satz 79: Der WILSONSche Satz	76
§ 6.7	Elementare Eigenschaften der quadratischen Reste und Nichtreste	77
§ 6.8	Die Ordnung von $a \pmod{m}$	78
§ 6.9	Die Umkehrung des FERMATSchen Satzes	79
§ 6.10	Teilbarkeit von $2^{p-1} - 1$ durch p^2	81
§ 6.11	Das GAUSSSche Lemma und der quadratische Charakter von 2	81
§ 6.12	Das Reziprozitätsgesetz	85
§ 6.13	Beweis des Reziprozitätsgesetzes	86
§ 6.14	Sätze zur Primprüfung	88
§ 6.15	Faktoren MERSENNEscher Zahlen: ein Satz von EULER	89

Kapitel 7. Allgemeine Eigenschaften von Kongruenzen

§ 7.1	Wurzeln von Kongruenzen	92
§ 7.2	Ganzzahlige Polynome und identische Kongruenzen	92
§ 7.3	Teilbarkeit von Polynomen \pmod{m}	94
§ 7.4	Wurzeln von Kongruenzen nach einem Primzahlmodul	95
§ 7.5	Einige Anwendungen der allgemeinen Sätze	96
§ 7.6	LAGRANGES Beweis des FERMATSchen und WILSONSchen Satzes	98
§ 7.7	Der Rest von $\left\{\frac{1}{2}(p-1)\right\}!$	99

§ 7.8	Ein Satz von WOLSTENHOLME	99
§ 7.9	Der VON STAUDTSche Satz	101
§ 7.10	Beweis des VON STAUDTSchen Satzes	103

Kapitel 8. Kongruenzen nach zusammengesetzten Moduln

§ 8.1	Lineare Kongruenzen	106
§ 8.2	Kongruenzen höheren Grades	108
§ 8.3	Kongruenzen nach dem Modul einer Primzahlpotenz	109
§ 8.4	Beispiele	110
§ 8.5	Die identische Kongruenz von BAUER	112
§ 8.6	Die Kongruenz von BAUER: der Fall $p = 2$	114
§ 8.7	Ein Satz von LEUDESORF	115
§ 8.8	Weitere Folgerungen aus dem Satz von BAUER	117
§ 8.9	Die Reste von 2^{p-1} und $(p-1)!$ modulo p^2	119

Kapitel 9. Die Darstellung von Zahlen durch Dezimalbrüche

§ 9.1	Der zu einer gegebenen Zahl gehörende Dezimalbruch	121
§ 9.2	Abbrechende und periodische Dezimalbrüche	124
§ 9.3	Darstellung von Zahlen in anderen Systemen	126
§ 9.4	Durch Dezimalbrüche definierte Irrationalzahlen	128
§ 9.5	Teilbarkeitsregeln	129
§ 9.6	Dezimalbrüche mit maximaler Periode	130
§ 9.7	BACHETS Gewichtsproblem	131
§ 9.8	Das Nimspiel	133
§ 9.9	Ganze Zahlen mit fehlenden Ziffern	136
§ 9.10	Mengen vom Maß Null	137
§ 9.11	Dezimalbrüche mit fehlenden Ziffern	139
§ 9.12	Normale Zahlen	141
§ 9.13	Beweis, daß fast alle Zahlen normal sind	142

Kapitel 10. Kettenbrüche

§ 10.1	Endliche Kettenbrüche	147
§ 10.2	Näherungsbrüche für einen Kettenbruch	148
§ 10.3	Kettenbrüche mit positiven Nennern	150
§ 10.4	Einfache Kettenbrüche	150
§ 10.5	Die Darstellung eines irreduziblen rationalen Bruchs durch einen einfachen Kettenbruch	151
§ 10.6	Der Kettenbruchalgorithmus und der EUKLIDISCHE Algorithmus	153
§ 10.7	Die Differenz zwischen dem Bruch und seinen Näherungsbrüchen	155
§ 10.8	Unendliche einfache Kettenbrüche	157
§ 10.9	Die Darstellung einer Irrationalzahl durch einen unendlichen Kettenbruch ..	158
§ 10.10	Ein Hilfssatz	160
§ 10.11	Äquivalente Zahlen	161
§ 10.12	Periodische Kettenbrüche	163
§ 10.13	Einige spezielle quadratische Irrationalzahlen	166

§ 10.14	Die Folgen von FIBONACCI und LUCAS	168
§ 10.15	Approximationen durch Näherungsbrüche	171

Kapitel 11. Approximation von Irrationalzahlen durch Rationalzahlen

§ 11.1	Problemstellung	175
§ 11.2	Allgemeines über das Problem	176
§ 11.3	Ein Beweisverfahren von DIRICHLET	178
§ 11.4	Approximationsordnungen	179
§ 11.5	Algebraische und transzendente Zahlen	180
§ 11.6	Die Existenz transzendenter Zahlen	182
§ 11.7	Der Satz von LIOUVILLE und die Konstruktion transzendenter Zahlen	183
§ 11.8	Das Maß für die beste Approximation einer willkürlich gewählten Irrationalzahl	185
§ 11.9	Ein weiterer Satz über die Näherungsbrüche eines Kettenbruchs	187
§ 11.10	Kettenbrüche mit beschränkten Teilennern	188
§ 11.11	Weitere Sätze über Approximationen	191
§ 11.12	Gleichzeitige Approximation	192
§ 11.13	Die Transzendenz von e	193
§ 11.14	Die Transzendenz von π	197

Kapitel 12. Der Fundamentalsatz der Arithmetik in $k(1)$, $k(i)$ und $k(\rho)$

§ 12.1	Algebraische Zahlen und ganze Zahlen	202
§ 12.2	Die rationalen ganzen Zahlen, die GAUSSSchen ganzen Zahlen und die ganzen Zahlen von $k(\rho)$	203
§ 12.3	Der EUKLIDISCHE Algorithmus	204
§ 12.4	Anwendung des EUKLIDISCHEN Algorithmus auf den Fundamentalsatz in $k(1)$	205
§ 12.5	Geschichtliche Bemerkungen zum EUKLIDISCHEN Algorithmus und zum Fundamentalsatz	206
§ 12.6	Eigenschaften der GAUSSSchen ganzen Zahlen	207
§ 12.7	Primzahlen in $k(i)$	208
§ 12.8	Der Fundamentalsatz der Arithmetik in $k(i)$	210
§ 12.9	Die ganzen Zahlen von $k(\rho)$	213

Kapitel 13. Einige Diophantische Gleichungen

§ 13.1	Der große FERMATISCHE Satz	216
§ 13.2	Die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$	216
§ 13.3	Die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$	218
§ 13.4	Die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$	219
§ 13.5	Die Gleichung $x^3 + y^3 = 3z^3$	223
§ 13.6	Die Darstellung einer rationalen Zahl als Summe von rationalen Kubikzahlen	224
§ 13.7	Die Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$	227

Kapitel 14. Quadratische Zahlkörper (1)

§ 14.1	Algebraische Zahlkörper	232
§ 14.2	Algebraische Zahlen und ganze algebraische Zahlen; primitive Polynome	233
§ 14.3	Der allgemeine quadratische Zahlkörper $k(\sqrt{m})$	235

§ 14.4	Einheiten und Primzahlen	236
§ 14.5	Die Einheiten von $k(\sqrt{2})$	238
§ 14.6	Körper, in denen der Fundamentalsatz falsch ist	240
§ 14.7	Komplexe euklidische Zahlkörper	241
§ 14.8	Reelle euklidische Zahlkörper	244
§ 14.9	Reelle euklidische Zahlkörper (Fortsetzung)	246

Kapitel 15. Quadratische Zahlkörper (2)

§ 15.1	Die Primzahlen von $k(i)$	249
§ 15.2	Der FERMATSEHE Satz in $k(i)$	251
§ 15.3	Die Primzahlen von $k(\rho)$	252
§ 15.4	Die Primzahlen von $k(\sqrt{2})$ und $k(\sqrt{5})$	253
§ 15.5	Das LUCASSCHE Kriterium zur Untersuchung der MERSENNESCHEN Zahl M_{4n+3} auf ihren Primzahlcharakter	255
§ 15.6	Allgemeine Bemerkungen über die Arithmetik quadratischer Zahlkörper	258
§ 15.7	Ideale in einem quadratischen Zahlkörper	260
§ 15.8	Andere Zahlkörper	263

Kapitel 16. Die zahlentheoretischen Funktionen $\varphi(n)$, $\mu(n)$, $d(n)$, $\sigma(n)$, $r(n)$

§ 16.1	Die Funktion $\varphi(n)$	266
§ 16.2	Ein weiterer Beweis für Satz 63	267
§ 16.3	Die MÖBIUSSCHE Funktion	268
§ 16.4	Die MÖBIUSSCHE Umkehrformel	269
§ 16.5	Weitere Umkehrformeln	270
§ 16.6	Der Wert der RAMANUJANSCHEN Summe	271
§ 16.7	Die Funktionen $d(n)$ und $\sigma_k(n)$	271
§ 16.8	Vollkommene Zahlen	272
§ 16.9	Die Funktion $r(n)$	273
§ 16.10	Beweis der Formel für $r(n)$	275

Kapitel 17. Erzeugende Funktionen von zahlentheoretischen Funktionen

§ 17.1	Die Erzeugung zahlentheoretischer Funktionen mit Hilfe DIRICHLETSCHER Reihen	278
§ 17.2	Die Zeta-Funktion	280
§ 17.3	Das Verhalten von $\zeta(s)$ für $s \rightarrow 1$	281
§ 17.4	Multiplikation DIRICHLETSCHER Reihen	282
§ 17.5	Die erzeugenden Funktionen einiger spezieller zahlentheoretischer Funktionen	284
§ 17.6	Die analytische Deutung der MÖBIUSSCHEN Formel	286
§ 17.7	Die Funktion $A(n)$	288
§ 17.8	Weitere Beispiele erzeugender Funktionen	290
§ 17.9	Die erzeugende Funktion von $r(n)$	292
§ 17.10	Erzeugende Funktionen anderer Art	292

Kapitel 18. Die Größenordnung zahlentheoretischer Funktionen

§ 18.1	Die Größenordnung von $d(n)$	296
§ 18.2	Die durchschnittliche Größenordnung von $d(n)$	300

§ 18.3	Die Größenordnung von $\sigma(n)$	302
§ 18.4	Die Größenordnung von $\varphi(n)$	303
§ 18.5	Die durchschnittliche Größenordnung von $\varphi(n)$	305
§ 18.6	Die Anzahl der quadratfreien Zahlen	306
§ 18.7	Die Größenordnung von $r(n)$	307

Kapitel 19. Zerfällungen

§ 19.1	Das allgemeine Problem der additiven Zahlentheorie	310
§ 19.2	Zerfällungen von Zahlen	310
§ 19.3	Die erzeugende Funktion von $p(n)$	311
§ 19.4	Andere erzeugende Funktionen	313
§ 19.5	Zwei Sätze von EULER	315
§ 19.6	Weitere algebraische Identitäten	318
§ 19.7	Eine andere Formel für $F(x)$	318
§ 19.8	Ein Satz von JACOBI	320
§ 19.9	Spezialfälle der JACOBISCHEN Identität	322
§ 19.10	Anwendungen von Satz 353	324
§ 19.11	Ein elementarer Beweis für Satz 358	325
§ 19.12	Kongruenzeigenschaften von $p(n)$	327
§ 19.13	Die Identitäten von ROGERS und RAMANUJAN	330
§ 19.14	Beweis der Sätze 362 und 363	331
§ 19.15	Der RAMANUJANSche Kettenbruch	335

Kapitel 20. Die Darstellung einer Zahl durch zwei oder vier Quadrate

§ 20.1	Das WARINGSche Problem: die Zahlen $g(k)$ und $G(k)$	337
§ 20.2	Quadrate	339
§ 20.3	Zweiter Beweis von Satz 366	340
§ 20.4	Dritter und vierter Beweis von Satz 366	341
§ 20.5	Der Vier-Quadrate-Satz	343
§ 20.6	Quaternionen	344
§ 20.7	Vorbereitende Sätze über ganzzahlige Quaternionen	347
§ 20.8	Der größte gemeinsame rechtsseitige Teiler zweier Quaternionen	349
§ 20.9	Primzahlquaternionen und Beweis von Satz 370	351
§ 20.10	Die Werte von $g(2)$ und $G(2)$	353
§ 20.11	Hilfssätze für den dritten Beweis von Satz 369	353
§ 20.12	Dritter Beweis für Satz 369: die Anzahl der Darstellungen	354
§ 20.13	Darstellungen durch eine größere Anzahl von Quadraten	357

Kapitel 21. Darstellung durch Kuben und höhere Potenzen

§ 21.1	Biquadrate	361
§ 21.2	Kuben: die Existenz von $G(3)$ und $g(3)$	362
§ 21.3	Eine Schranke für $g(3)$	363
§ 21.4	Höhere Potenzen	365
§ 21.5	Eine untere Schranke für $g(k)$	366
§ 21.6	Untere Schranken für $G(k)$	366

§ 21.7	Summen mit Vorzeichen: die Anzahl $v(k)$	370
§ 21.8	Obere Schranken für $v(k)$	372
§ 21.9	Das Problem von PROUET und TARBV: die Zahl $P(k, j)$	374
§ 21.10	Berechnung von $P(k, j)$ für spezielle k und j	375
§ 21.11	Weitere Probleme aus der diophantischen Analysis	378

Kapitel 22. Die Folge der Primzahlen (3)

§ 22.1	Die Funktionen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$	387
§ 22.2	Beweis, daß $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ von der Ordnung x sind	388
§ 22.3	Das BERTRANDSche Postulat und eine „Formel“ für Primzahlen	390
§ 22.4	Beweis der Sätze 7 und 9	393
§ 22.5	Zwei Umformungen	394
§ 22.6	Eine wichtige Summe	395
§ 22.7	Die Summe $\sum p^{-1}$ und das Produkt $\prod(1 - p^{-1})$	397
§ 22.8	Der Satz von MERTENS	399
§ 22.9	Beweis der Sätze 323 und 328	401
§ 22.10	Die Anzahl der Primfaktoren von n	402
§ 22.11	Die normale Größenordnung von $\omega(n)$ und $\Omega(n)$	404
§ 22.12	Eine Bemerkung über runde Zahlen	406
§ 22.13	Die normale Ordnung von $d(n)$	407
§ 22.14	Der Satz von SELBERG	408
§ 22.15	Die Funktionen $R(x)$ und $V(\xi)$	410
§ 22.16	Vervollständigung der Beweise für die Sätze 434, 6 und 8	413
§ 22.17	Beweis von Satz 335	416
§ 22.18	Produkte von k Primfaktoren	417
§ 22.19	Primzahlen in einem Intervall	419

Kapitel 23. Der Satz von KRONECKER

§ 23.1	Der Satz von KRONECKER für eine Dimension	422
§ 23.2	Beweise für den eindimensionalen Satz	423
§ 23.3	Das Problem des gespiegelten Lichtstrahls	426
§ 23.4	Aufstellung des allgemeinen Satzes	428
§ 23.5	Die beiden Formen des Satzes	430
§ 23.6	Ein Beispiel	432
§ 23.7	LETTENMEYERS Beweis des Satzes	432
§ 23.8	ESTERMANNs Beweis des Satzes	434
§ 23.9	BOHRs Beweis des Satzes	436
§ 23.10	Gleichverteilung	439

Kapitel 24. Geometrie der Zahlen

§ 24.1	Einleitung und allgemeine Fassung des Fundamentalsatzes	443
§ 24.2	Einfache Anwendungen	444
§ 24.3	Arithmetischer Beweis von Satz 448	447
§ 24.4	Bestmögliche Ungleichungen	449
§ 24.5	Die bestmöglichen Ungleichungen für $\xi^2 + \eta^2$	450

§ 24.6 Die bestmögliche Ungleichung für $ \xi\eta $	452
§ 24.7 Ein Satz über inhomogene Formen	453
§ 24.8 Arithmetischer Beweis von Satz 455	455
§ 24.9 Der Satz von TSCHEBOTAREFF	456
§ 24.10 Eine Umkehrung von MINKOWSKIS Satz 446	458
ANHANG. ÜBER PRIMZAHLPAARE	466
Literatur	469
Bemerkungen zu den verwendeten Bezeichnungen	472
Verzeichnis besonderer Symbole	473
Namenverzeichnis	475
Sachverzeichnis	478

Berichtigung

Seite 44, Zeile 15 von unten: statt c'' muß es heißen c''' .