

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Geometrie auf der Kugeloberfläche</b>	<b>1</b>
1.1 Grundlagen der sphärischen Geometrie	2
1.1.1 Kugel, Sphäre, Kugelkoordinaten	2
1.1.2 Klein- und Großkreise, diametrale Punktpaare, Geraden, Strecken und Abstände auf der Sphäre	5
1.1.3 Winkel zwischen sphärischen Geraden; Bewegungen und Kongruenz von Figuren auf der Sphäre	10
1.2 Sphärische Zwei- und Dreiecke	13
1.2.1 Sphärische Zweiecke und ihr Flächeninhalt	13
1.2.2 Sphärische Dreiecke	15
1.2.3 Flächeninhalt, Winkelsumme und Seitensumme Eulerscher Dreiecke; Polardreiecke	18
1.3 Sphärische Trigonometrie	22
1.3.1 Das rechtwinklige sphärische Dreieck	22
1.3.2 Schiefwinklige Eulersche Dreiecke	27
1.3.3 Berechnungen an sphärischen Dreiecken	30
1.4 Mathematische Geographie	33
1.4.1 Berechnung der Orthodromen und der Kurswinkel	33
1.4.2 Loxodrome	34
1.4.3 Bestimmung des Scheitelpunktes	35
1.4.4 Die Methode der Funkpeilung	36
1.5 Sphärische Astronomie	37
1.5.1 Grundlagen, astronomische Koordinatensysteme	37
1.5.2 Nautisches Dreieck, Ortsbestimmung	39
1.6 Geschichte der sphärischen Geometrie	42
1.7 Wege des Aufbaus der sphärischen Geometrie	45
1.7.1 Überblick über mögliche Varianten, sphärische Geometrie zu betreiben	45
1.7.2 Vektorielle Behandlung der sphärischen Geometrie	46

<b>2</b>	<b>Axiomatischer Aufbau der Geometrie</b>	<b>51</b>
2.1	Einführung in die Axiomatik der Geometrie . . . . .	51
2.1.1	Die Anfänge der Geometrie und die Herausbildung der axiomatischen Arbeitsweise . . . . .	51
2.1.2	Einige Probleme bei der euklidischen Axiomatik . .	55
2.1.3	Forderungen an ein Axiomensystem; geometrische Axiomatik und Realität . . . . .	58
2.1.4	Ein Axiomensystem der euklidischen Geometrie . . .	61
2.2	Inzidenzgeometrie . . . . .	64
2.2.1	Folgerungen aus den Inzidenzaxiomen . . . . .	65
2.2.2	Modelle der Inzidenzaxiome . . . . .	67
2.3	Abstandsaxiome, Folgerungen und Modelle . . . . .	73
2.3.1	Modelle der Inzidenz- und Abstandsaxiome . . . . .	73
2.3.2	Folgerungen aus den Axiomengruppen I und II; Strecken und Halbgeraden . . . . .	76
2.4	Anordnungsgeometrie . . . . .	80
2.4.1	Folgerungen aus den Axiomengruppen I – III . . . . .	80
2.4.2	Winkel . . . . .	81
2.5	Bewegungen und Kongruenz . . . . .	83
2.5.1	Bewegungen . . . . .	83
2.5.2	Kongruenz geometrischer Figuren . . . . .	89
2.5.3	Mittelpunkt, Winkelhalbierende, spezielle Winkel, Lot	92
2.5.4	Winkelgröße und Winkelmaß . . . . .	97
2.5.5	Weitere Sätze der absoluten Geometrie . . . . .	105
2.6	Euklidische Geometrie . . . . .	110
2.6.1	Das Parallelenaxiom und einige Folgerungen . . . . .	110
2.6.2	Die Strahlensätze . . . . .	113
2.6.3	Ähnlichkeit geometrischer Figuren . . . . .	117
2.6.4	Die Satzgruppe des Pythagoras . . . . .	121
2.7	Andere Axiomensysteme . . . . .	124
2.7.1	Varianten der Axiomengruppen I - V . . . . .	124
	Inzidenzaxiome . . . . .	124
	Abstandsaxiome . . . . .	126
	Anordnungsaxiome . . . . .	127
	Bewegungsaxiome . . . . .	127
	Parallelenaxiom . . . . .	129
2.7.2	Das Hilbertsche Axiomensystem und Varianten die- ses Axiomensystems . . . . .	130
2.7.3	Algebraisch orientierte Axiomensysteme . . . . .	134
2.7.4	Erweiterung zu einem Axiomensystem der Raumgeo- metrie . . . . .	137
2.7.5	Ein Axiomensystem der sphärischen Geometrie . . .	139

<b>3</b>	<b>Lobatschewski-Geometrie</b>	<b>143</b>
3.1	Das Parallelenproblem . . . . .	145
3.1.1	Das V. Postulat von Euklid . . . . .	145
3.1.2	Beweisversuche für das euklidische Parallelenaxiom .	148
	Parallelenaxiom und Innenwinkelsumme . . . . .	149
	Die Beweisversuche von Saccheri und Lambert . . . .	156
	Parallelenaxiom und Ähnlichkeit . . . . .	158
	Zusammenfassung . . . . .	159
3.2	Grundzüge der Lobatschewski-Geometrie . . . . .	162
3.2.1	Entstehungsgeschichte, weltanschauliche Probleme .	162
3.2.2	Das Parallelenaxiom von Lobatschewski und erste Folgerungen . . . . .	166
3.2.3	Parallele und divergierende Geraden . . . . .	169
3.3	Das Poincaré-Modell . . . . .	174
3.3.1	Widerspruchsfreiheit und Modelle . . . . .	174
3.3.2	Punkte und Geraden im Poincaré-Modell . . . . .	176
3.3.3	Abstände von Punkten im Poincaré-Modell . . . . .	178
3.3.4	Bewegungen im Poincaré-Modell . . . . .	182
3.3.5	Winkelmaß, Parallele und divergierende Geraden im Poincaré-Modell . . . . .	191
3.3.6	Abstandslinien im Poincaré-Modell . . . . .	193
3.3.7	Das Modell von Cayley und Klein . . . . .	194
3.4	Die Lobatschewskische Funktion II . . . . .	196
3.4.1	Sätze über parallele und divergierende Geraden . . .	196
3.4.2	Eigenschaften der Funktion II . . . . .	197
3.4.3	Schlußfolgerungen aus den Eigenschaften der Funk- tion II . . . . .	202
3.5	Hyperbolische Trigonometrie . . . . .	204
3.5.1	Gleichungsdarstellung der Funktion II . . . . .	204
	Hyperbolische Funktionen . . . . .	205
3.5.2	Beziehungen in rechtwinkligen Dreiecken . . . . .	206
3.5.3	Beziehungen in schiefwinkligen Dreiecken . . . . .	210
3.6	Geometrie auf Flächen konstanter Krümmung . . . . .	213
3.6.1	Ebene und Sphäre als Flächen konstanter Krümmung	214
3.6.2	Der pseudoeuklidische Raum . . . . .	218
3.6.3	Die Geometrie auf einer Sphäre mit imaginärem Ra- dius als Modell der Lobatschewski-Geometrie . . . .	222
3.7	Ausblick . . . . .	226
3.7.1	Entwicklung der Geometrie nach der Herausbildung nichteuklidischer Geometrien . . . . .	226
3.7.2	Nichteuklidische Geometrien und unser realer Raum	230

<b>A Lösungen der Aufgaben</b>	<b>233</b>
A.1 Lösungen der Aufgaben des 1. Kapitels . . . . .	233
A.2 Lösungen der Aufgaben des 2. Kapitels . . . . .	237
A.3 Lösungen der Aufgaben des 3. Kapitels . . . . .	241
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>247</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>251</b>