

Inhaltsverzeichnis

1 Geometrie auf der Kugeloberfläche	1
1.1 Grundlagen der sphärischen Geometrie	2
1.1.1 Kugel, Sphäre, Kugelkoordinaten	2
1.1.2 Klein- und Großkreise, diametrale Punktpaare, Geraden, Strecken und Abstände auf der Sphäre	5
1.1.3 Winkel zwischen sphärischen Geraden; Bewegungen und Kongruenz von Figuren auf der Sphäre	10
1.2 Sphärische Zwei- und Dreiecke	13
1.2.1 Sphärische Zweiecke und ihr Flächeninhalt	13
1.2.2 Sphärische Dreiecke	15
1.2.3 Flächeninhalt, Winkelsumme und Seitensumme Eulerscher Dreiecke; Polardreiecke	18
1.3 Sphärische Trigonometrie	22
1.3.1 Das rechtwinklige sphärische Dreieck	22
1.3.2 Schiefwinklige Eulersche Dreiecke	27
1.3.3 Berechnungen an sphärischen Dreiecken	30
1.4 Mathematische Geographie	33
1.4.1 Berechnung der Orthodromen und der Kurswinkel	33
1.4.2 Loxodrome	34
1.4.3 Bestimmung des Scheitelpunktes	35
1.4.4 Die Methode der Funkpeilung	36
1.5 Sphärische Astronomie	37
1.5.1 Grundlagen, astronomische Koordinatensysteme	37
1.5.2 Nautisches Dreieck, Ortsbestimmung	39
1.6 Geschichte der sphärischen Geometrie	42
1.7 Wege des Aufbaus der sphärischen Geometrie	45
1.7.1 Überblick über mögliche Varianten, sphärische Geometrie zu betreiben	45
1.7.2 Vektorielle Behandlung der sphärischen Geometrie	46

2	Axiomatischer Aufbau der Geometrie	51
2.1	Einführung in die Axiomatik der Geometrie	51
2.1.1	Die Anfänge der Geometrie und die Herausbildung der axiomatischen Arbeitsweise	51
2.1.2	Einige Probleme bei der euklidischen Axiomatik . .	55
2.1.3	Forderungen an ein Axiomensystem; geometrische Axiomatik und Realität	58
2.1.4	Ein Axiomensystem der euklidischen Geometrie . . .	61
2.2	Inzidenzgeometrie	64
2.2.1	Folgerungen aus den Inzidenzaxiomen	65
2.2.2	Modelle der Inzidenzaxiome	67
2.3	Abstandsaxiome, Folgerungen und Modelle	73
2.3.1	Modelle der Inzidenz- und Abstandsaxiome	73
2.3.2	Folgerungen aus den Axiomengruppen I und II; Strecken und Halbgeraden	76
2.4	Anordnungsgeometrie	80
2.4.1	Folgerungen aus den Axiomengruppen I – III	80
2.4.2	Winkel	81
2.5	Bewegungen und Kongruenz	83
2.5.1	Bewegungen	83
2.5.2	Kongruenz geometrischer Figuren	89
2.5.3	Mittelpunkt, Winkelhalbierende, spezielle Winkel, Lot	92
2.5.4	Winkelgröße und Winkelmaß	97
2.5.5	Weitere Sätze der absoluten Geometrie	105
2.6	Euklidische Geometrie	110
2.6.1	Das Parallelenaxiom und einige Folgerungen	110
2.6.2	Die Strahlensätze	113
2.6.3	Ähnlichkeit geometrischer Figuren	117
2.6.4	Die Satzgruppe des Pythagoras	121
2.7	Andere Axiomensysteme	124
2.7.1	Varianten der Axiomengruppen I - V	124
	Inzidenzaxiome	124
	Abstandsaxiome	126
	Anordnungsaxiome	127
	Bewegungsaxiome	127
	Parallelenaxiom	129
2.7.2	Das Hilbertsche Axiomensystem und Varianten die- ses Axiomensystems	130
2.7.3	Algebraisch orientierte Axiomensysteme	134
2.7.4	Erweiterung zu einem Axiomensystem der Raumgeo- metrie	137
2.7.5	Ein Axiomensystem der sphärischen Geometrie . . .	139

3	Lobatschewski-Geometrie	143
3.1	Das Parallelenproblem	145
3.1.1	Das V. Postulat von Euklid	145
3.1.2	Beweisversuche für das euklidische Parallelenaxiom .	148
	Parallelenaxiom und Innenwinkelsumme	149
	Die Beweisversuche von Saccheri und Lambert	156
	Parallelenaxiom und Ähnlichkeit	158
	Zusammenfassung	159
3.2	Grundzüge der Lobatschewski-Geometrie	162
3.2.1	Entstehungsgeschichte, weltanschauliche Probleme .	162
3.2.2	Das Parallelenaxiom von Lobatschewski und erste Folgerungen	166
3.2.3	Parallele und divergierende Geraden	169
3.3	Das Poincaré-Modell	174
3.3.1	Widerspruchsfreiheit und Modelle	174
3.3.2	Punkte und Geraden im Poincaré-Modell	176
3.3.3	Abstände von Punkten im Poincaré-Modell	178
3.3.4	Bewegungen im Poincaré-Modell	182
3.3.5	Winkelmaß, Parallele und divergierende Geraden im Poincaré-Modell	191
3.3.6	Abstandslinien im Poincaré-Modell	193
3.3.7	Das Modell von Cayley und Klein	194
3.4	Die Lobatschewskische Funktion II	196
3.4.1	Sätze über parallele und divergierende Geraden . . .	196
3.4.2	Eigenschaften der Funktion II	197
3.4.3	Schlußfolgerungen aus den Eigenschaften der Funk- tion II	202
3.5	Hyperbolische Trigonometrie	204
3.5.1	Gleichungsdarstellung der Funktion II	204
	Hyperbolische Funktionen	205
3.5.2	Beziehungen in rechtwinkligen Dreiecken	206
3.5.3	Beziehungen in schiefwinkligen Dreiecken	210
3.6	Geometrie auf Flächen konstanter Krümmung	213
3.6.1	Ebene und Sphäre als Flächen konstanter Krümmung	214
3.6.2	Der pseudoeuklidische Raum	218
3.6.3	Die Geometrie auf einer Sphäre mit imaginärem Ra- dius als Modell der Lobatschewski-Geometrie	222
3.7	Ausblick	226
3.7.1	Entwicklung der Geometrie nach der Herausbildung nichteuklidischer Geometrien	226
3.7.2	Nichteuklidische Geometrien und unser realer Raum	230

A Lösungen der Aufgaben	233
A.1 Lösungen der Aufgaben des 1. Kapitels	233
A.2 Lösungen der Aufgaben des 2. Kapitels	237
A.3 Lösungen der Aufgaben des 3. Kapitels	241
Literaturverzeichnis	247
Stichwortverzeichnis	251