

# Inhalt

I. Historischer Überblick . . . . .	1
1: Geschichtliche Angaben und Zitate · 2: Sir William Rowan Hamilton ·	
II. Geometrische Stilarten . . . . .	16
3: Über Axiomatik · 4: Klassischer Aufbau der Geometrie ·	
5: Skizzierung der Affinen Geometrie · 6: Skizzierung der Projektiven Geometrie · 7: Baryzentrischer Kalkül ·	
III. Komplexe Zahlen . . . . .	27
8: Das Feld $\mathbb{C}$ · 9: Winkel mit Drehsinn · 10: Blick auf Clifford-Algebren · 11: Möbius-Transformationen · 12: Kreise "im weiteren Sinn" · 13: Sehnenviereck des Kreises · 14: Gaußsche Gerade des Kreistangenten-Vierseits ·	
15: Feuerbachscher Kreis des Dreiecks · 16: Orthozentrum, Fußpunkte und Hyperbel · 17: Reelle Quaternionen · 18: Cayley-Algebra ·	
IV. Zwei Laguerre-Geometrien . . . . .	47
19: Drei Typen "binärer Zahlen" · 20: Das Urbüschel der Speere · 21: Translationen zur Erzeugung der euklidischen Ebene · 22: "Transporte" von Speeren zur Erzeugung der hyperbolischen Ebene · 23: Der Winkel des einseitigen Parallelismus ·	
V. Hermann Graßmanns Leben und sein algebraisches Werk . . . . .	62
24: Die Geburt der Vektorrechnung · 25: Die Lineale Ausdehnungslehre · 26: Vorläufiges zum regressiven Produkt ·	
27: Das Ausbleiben jeglicher Anerkennung · 28: Die Geometrische Analyse · 29: Ein 15-jähriges Zwischenspiel ·	
30: Die "Ausdehnungslehre von 1862" · 31: Letzte mathematische Arbeiten ·	

VI. Graßmanns geistige Erben . . . . .	86
32: Erste Zeichen von Anerkennung · 33: Giuseppe Peano · 34: Cesare Burali-Forti und Roberto Marcolongo · 35: Hermann Graßmann der Jüngere · 36: Rudolf Mehmke · 37: Eugen Jahnke · 38: Alfred Lotze ·	
VII. Affiner Vektorraum und sein Dual . . . . .	97
39: Definitionen · 40: Dualer Vektorraum · 41: Metrik ·	
VIII. Äußere Algebra über einem Vektorraum . . . . .	105
42: Vorbereitendes · 43: Algebra der Multivektoren · 44: Zusätzliche Einzelheiten ·	
IX. Determinanten . . . . .	120
45: Multilineare alternierende Funktionen · 46: Äußere Potenzen einer linearen Abbildung · 47: Formeln für lineare Abhängigkeit ·	
X. Äußere Algebra über dem Dual . . . . .	129
48: Ko-Multivektoren · 49: Innere Produkte und Kriterium für Aufspaltbarkeit · 50: Koppelung von $\bigwedge \mathcal{U}$ mit $\bigwedge \mathcal{U}^*$ ·	
XI. Regressives Produkt . . . . .	140
51: Überwindung der Schwierigkeiten · 52: Noch ein Blick in die Geschichte · 53: Zweidimens.Grundvektorraum · 54: Dreidimens.Grundvektorraum · 55: Vierdimens.Grundvektorraum · 56: Noch einmal pseudokomplexe Zahlen ·	
XII. Projektive Ebene I (element.Einführung) . . . . .	156
57: Komplettierung der affinen Ebene · 58: Projektive Kollineationen ·	
XIII. Algebraische Essenz der projektiven Räume . . . . .	163
59: Klassen mod. $\$$ und ihre lineare (Un-)Abhängigkeit · 60: Verband der projektiven Unterräume · 61: Drei Betrachtungsweisen · 62: Projektive Koordinatensysteme ·	
XIV. Projektive Ebene II . . . . .	177
63: Anwendung von Graßmanns Algebra · 64: Polaritäten ·	

XV. Konfigurations-Sätze . . . . .	184
65: Schließungsbedingungen · 66: Satz von Desargues ·	
67: Satz von Pappus · 68: Pascals Kegelschnittsatz ·	
XVI. Gewöhnliches Doppelverhältnis . . . . .	198
69: Definition und Eigenschaften · 70: Geradenbüschel	
und harmonische Quadrupel · 71: Beziehung zu Kegelschnitten ·	
XVII. Vollständiges Viereck	
und Kegelschnittbüschel . . . . .	208
72: Viereck mit umbeschriebenem Kegelschnitt · 73:	
Vierseit mit schneidender Gerade · 74: Kegelschnitt-	
büschel und Involution ·	
XVIII. Geraden im Raum $\mathbb{P}_3$ . . . . .	219
75: Darstellungs-Bivektoren · 76: Plückersche Geraden-	
koordinaten · 77: Gerade und Punkt, Gerade und Ebene ·	
78: Zwei Geraden · 79: Doppelverhältnis und Tetraeder ·	
80: Nicht-aufspaltbare Bivektoren und Nullsysteme ·	
XIX. Lineare Abhängigkeit von Geraden	
und Regelquadrik . . . . .	233
81: Windschiefe Geraden im $\mathbb{P}_3$ · 82: Regelquadrik ·	
83: Zueinander konjugierte Regelscharen ·	
XX. Tetraeder und Regelscharen . . . . .	242
84: Polargeraden im $\mathbb{P}_3$ · 85: Zur Regelquadrik gehörige	
Polarität · 86: Erzeugung einer Regelquadrik durch vier	
Tetraederkanten · 87: Ein Satz von Lie · 88: Weitere	
Beispiele linearer Abhängigkeit · 89: Torsion einer	
Regelschar ·	
XXI. Projektive Invarianten	
für 4 windschiefe Geraden . . . . .	260
90: Beziehung zwischen zwei Punktreihen im Raum · 91:	
Graßmannsches Doppelverhältnis · 92: Bestimmung der	
4. Gerade bei vorgeschriebenen Werten der beiden Dv. ·	
93: Beispiel mit zwei Tetraedern ·	

XXII. Euklidische Geometrie  
 der Ebene und des Raums . . . . . 268

94: Zur Notation · 95: Streng-euklidische Metrik · 96:  
 Euklidische Ebene · 97: Auswertung des Distributivgeset-  
 zes (Di) · 98: Geraden im affinen Punktraum · 99: Vektori-  
 elles Kreuzprodukt · 100: Zwei Speere im euklidischen  
 Punktraum · 101: Höhen eines Tetraeders · 102: Der Punkt  
 von Monge ·

XXIII. Drehungen der 4-dimensionalen Kugel . . . . . 294

103: Komplemente für Bivektoren · 104: Komplemente für  
 Trivektoren · 105: Kugeldrehungen und Bivektoren · 106:  
 Hyperkugel und Quaternionen · 107: Drehungen des Typs  
 $(P \circ Q) \circ X \circ (Q \circ P)$  · 108: Drehungen der Typen  $X \circ R$  und  $L \circ X$  ·  
 109: Hesselbachs Theorie · 110: Beschreibung einer Dre-  
 hung  $A(X)$  durch  $L \circ X \circ R$  ·

XXIV. Kreise und Kreisbüschel  
 in Graßmanns Theorie . . . . . 325

111: Pseudo-euklidische Metrik · 112: Gerichtete Kreis-  
 linien (Zykel) · 113: Kreise auf der Kugeloberfläche ·  
 114: Kreisbüschel · 115: Berührungskreise des Dreiseits  
 · 116: Der Satz von Feuerbach ·

XXV. (J. PFALZGRAF:)  
 Graßmann-Mannigfaltigkeiten . . . . . 349

XXVI. Ein unerwartetes Happy End . . . . . 364

Literatur-Auswahl . . . . . 369

Erklärung der Symbole . . . . . 371

Namensverzeichnis . . . . . 372

Sach-Register . . . . . 374