

Inhaltsverzeichnis

I	Geometrisch-Topologische Vorbereitungen	1
1	Beispiele für Räume, Abbildungen und topologische Probleme	1
1.1	Das Homöomorphieproblem	1
1.2	Identifizieren	8
1.3	Beispiele zum Identifizieren	12
1.4	Flächen	17
1.5	Mannigfaltigkeiten	26
1.6	Ankleben von Zellen	31
1.7	Topologische Gruppen, Gruppenoperationen und Orbiträume	36
1.8	Schwache Topologie	40
1.9	Das Homöomorphieproblem: Fortsetzung	42
2	Homotopie	47
2.1	Homotope Abbildungen	47
2.2	Ein erstes Beispiel zur Homotopie: Abbildungen zwischen Kreislinien	52
2.3	Fortsetzung von Abbildungen und Homotopien	59
2.4	Homotopietyp	61
2.5	Notizen	68
3	Simplizialkomplexe und Polyeder	70
3.1	Grundbegriffe und Beispiele	70
3.2	Unterteilung und simpliziale Approximation	78
3.3	Freimachen durch Deformationen	83
3.4	Notizen	85

4	CW-Räume	87
4.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften	87
4.2	Konstruktion von CW-Räumen	91
4.3	Homotopieeigenschaften von CW-Räumen	94
4.4	Notizen	99
II	Fundamentalgruppe und Überlagerungen	100
5	Die Fundamentalgruppe	100
5.1	Allgemeine Eigenschaften der Fundamentalgruppe	100
5.2	Die Fundamentalgruppe der Kreislinie	108
5.3	Der Satz von Seifert und van Kampen	110
5.4	Folgerungen aus dem Seifert-van Kampen-Satz	117
5.5	Freie Gruppen und Graphen	121
5.6	Gruppenbeschreibungen und CW-Räume	126
5.7	Beispiele von Fundamentalgruppen	131
5.8	Homotopietypen zweidimensionaler CW-Räume	141
5.9	Notizen	144
6	Überlagerungen	146
6.1	Grundbegriffe und Beispiele	146
6.2	Liften	151
6.3	Das Liftungsverhalten einer Überlagerung	155
6.4	Die universelle Überlagerung	157
6.5	Deckbewegungen	161
6.6	Klassifikation von Überlagerungen durch Untergruppen der Fundamentalgruppe	164
6.7	Klassifikation von Überlagerungen durch Darstellungen der Fundamentalgruppe	166
6.8	Liften von Strukturen	168
6.9	Anwendungen der Überlagerungen in der Gruppentheorie	171

III Homologietheorie	175
7 Homologiegruppen von Simplicialkomplexen	175
7.1 Definition der Homologiegruppen	175
7.2 Beispiele zur Homologie	180
7.3 Simpliciale Abbildungen und Homologiegruppen	187
7.4 Relative Homologiegruppen	189
7.5 Notizen	194
8 Algebraische Hilfsmittel	195
8.1 Abelsche Gruppen	195
8.2 Exakte Sequenzen	202
8.3 Kettenkomplexe	205
8.4 Kategorien und Funktoren	210
9 Homologiegruppen topologischer Räume	215
9.1 Definition der Homologiegruppen	215
9.2 Exakte Homologiesequenzen	221
9.3 Der Homotopiesatz	223
9.4 Der Ausschneidungssatz	227
9.5 Homologie von Bällen und Sphären	233
9.6 Zelluläre Homologie	236
9.7 Vergleich von simplicialer und singulärer Homologie	241
9.8 Fundamentalgruppe und erste Homologiegruppe	245
9.9 Beispiele zur Homologie	247
9.10 Notizen	252
10 Homologie mit Koeffizienten	253
10.1 Einführung und Beispiele	253
10.2 Tensorprodukt	255
10.3 Torsionsprodukt	258
10.4 Das universelle Koeffiziententheorem	261

VIII

10.5 Homologiegruppen mit Koeffizienten	265
10.6 Beispiele und Anwendungen	268
10.7 Notizen	272
11 Einige Anwendungen der Homologietheorie	273
11.1 Topologische Eigenschaften der Sphären	273
11.2 Lokale Homologiegruppen und Invarianzsätze	275
11.3 Orientierung triangulierbarer Mannigfaltigkeiten	279
11.4 Orientierung topologischer Mannigfaltigkeiten	283
11.5 Ein zweites Beispiel zur Homotopie: Abbildungen zwischen Sphären	288
11.6 Der Fixpunktsatz von Lefschetz	295
11.7 Der Jordan-Brouwersche Separationssatz	299
12 Homologie von Produkten	305
12.1 Produktketten	305
12.2 Der Satz von Eilenberg-Zilber	308
12.3 Die Künneth-Formel	313
12.4 Das Homologie-Kreuzprodukt	315
12.5 Künneth-Formel mit Koeffizienten in einem Körper	319
12.6 Homologie von Produkten von CW-Räumen	321
IV Cohomologie, Dualität und Produkte	325
13 Cohomologie	325
13.1 Gruppen von Homomorphismen	325
13.2 Hom und Ext	328
13.3 Cohomologiegruppen von Kettenkomplexen	330
13.4 Das universelle Koeffiziententheorem	332
13.5 Simpliziale, singuläre und zelluläre Cohomologie	337
13.6 Beispiele zur Cohomologie	343
13.7 Notizen	347

14 Dualität in Mannigfaltigkeiten	349
14.1 Das cap-Produkt	349
14.2 Poincaré-Dualität	352
14.3 Die duale Zerlegung einer Mannigfaltigkeit	355
14.4 Der duale Kettenkomplex	359
14.5 Beweis des Poincaréschen Dualitätssatzes	361
14.6 Schnittzahlen	365
14.7 Verschlingungszahlen	370
14.8 Lefschetz- und Alexander-Dualität	376
14.9 Notizen	381
15 Der Cohomologiering	382
15.1 Das Cohomologie-Kreuzprodukt	382
15.2 Das cup-Produkt	385
15.3 Beispiele für cup-Produkte und Anwendungen	386
15.4 Cup-Produkt und Schnittzahlen	390
15.5 Der Cohomologiering der projektiven Räume	395
15.6 Cup-Produkt und Verschlingungszahlen	398
V Fortsetzung der Homotopietheorie	404
16 Homotopiegruppen	404
16.1 Mehrfacher Zusammenhang	404
16.2 Definition der Homotopiegruppen	408
16.3 Die Rolle des Basispunktes	411
16.4 Erste Methoden zur Berechnung von Homotopiegruppen	416
16.5 Beispiele für Homotopiegruppen	420
16.6 Relative Homotopiegruppen	423
16.7 Die exakte Homotopiesequenz	428
16.8 Der Hurewicz-Satz	432
16.9 Folgerungen und Beispiele	438

17 Faserungen und Homotopiegruppen	442
17.1 Faserräume	442
17.2 Liften von Homotopien	446
17.3 Homotopiegruppen und Faserungen	450
18 Homotopieklassifikation von Abbildungen	455
18.1 Gerüstweise Konstruktion von Abbildungen und Homotopien	455
18.2 Abbildungen in sphärische Räume	457
18.3 Hindernistheorie	460
18.4 Hindernisse gegen die Konstruktion von Schnitten (eine Skizze)	468
Literaturverzeichnis	470
Index	473
Symbole	483