

# Inhaltsverzeichnis

## Kapitel 1

### Primzerlegung in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

	Einleitung	
§ 0	Natürliche, ganze und rationale Zahlen . . . . .	13
	1. Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen und der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen –	
	2. Anordnung von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ – 3. Prinzip vom kleinsten Element und	
	Induktionsprinzip – 4. Division mit Rest	
§ 1	Teilbarkeit, Primzahlen . . . . .	22
	1. Teilbarkeitsbegriff – 2. Primzahlen – 3. Existenz unendlich vieler	
	Primzahlen – 4. Unzerlegbarkeit und Primeigenschaft	
§ 2	Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie . . . . .	28
	1. Existenz einer Primzerlegung – 2. Eindeutigkeit der Primzerlegung –	
	3*. Der Eindeutigkeitsbeweis von ZERMELO – 4*. Kritische Bemerkungen	
§ 3	Anwendungen des Hauptsatzes . . . . .	33
	1. Anzahl aller positiven Teiler – 2. Produkt aller positiven Teiler –	
	3. Summe aller positiven Teiler – 4. Vollkommene Zahlen –	
	5. Mersennesche Primzahlen – 6. Fermatsche Primzahlen	
§ 4	Zahlentheorie im Körper $\mathbb{Q}$ . . . . .	42
	1. Primzerlegung in $\mathbb{Q}$ – 2. Irrationalitätsaussagen – 3*. Zur Irrationalität	
	und Transzendenz von $e$ und $\pi$ – 4. Die Vielfachheitsfunktion $w_p(a)$ –	
	5*. Ägyptische Bruchdarstellungen, Fibonaccimethode	

## Kapitel 2

### Theorie des größten gemeinsamen Teilers in $\mathbb{Z}$

	Einleitung	
§ 1	Größter gemeinsamer Teiler . . . . .	55
	1. Größter gemeinsamer Teiler zweier ganzer Zahlen – 2. Euklidischer	
	Algorithmus – 3. Idealtheorietische Charakterisierung des größten	
	gemeinsamen Teilers – 4. Größter gemeinsamer Teiler endlich vieler	
	ganzer Zahlen – 5. Teilerfremdheit – 6. Reduzierte Bruchdarstellung –	
	7. Kleinstes gemeinsames Vielfaches	
§ 2	Über die Verteilung und Darstellung von Primzahlen . . . . .	70
	1. Elementare Verteilungssätze – 2. Großer Primzahlsatz – 3*. Die	
	Chebyshevsche Abschätzung – 4. Große Primzahlen – 5. Primzahlen in	
	arithmetischen Progressionen – 6. Primzahlen als Werte von Polynomen	
§ 3	Zahlentheoretische Funktionen . . . . .	81
	1. Multiplikative Funktionen – 2. Eulersche $\varphi$ -Funktion –	
	3. DIRICHLET-Faltung – 4. Summatorfunktionen	

## Kapitel 3

**Zahlentheorie in allgemeinen Integritätsringen**

Einleitung

§ 0	Integritätsringe . . . . .	95
	1. Allgemeine Begriffe der Ringtheorie – 2. Polynomringe – 3. Quadratische Zahlbereiche	
§ 1	Teilbarkeitstheorie in Integritätsringen . . . . .	101
	1. Grundbegriffe der Teilbarkeitstheorie – 2. Normfunktionen – 3. Zerlegungssatz für Integritätsringe mit monotoner Normfunktion	
§ 2	Faktorielle Ringe, Hauptidealringe und euklidische Ringe . . . . .	111
	1. Faktorielle Ringe – 2. Hauptidealringe – 3. Euklidische Ringe – 4. Beispiele – 5*. Weiterführende Ergebnisse – 6. Zerlegung von Primzahlen in quadratischen Zahlbereichen – 7. Charakterisierung von Primzahlen in quadratischen Zahlbereichen	
§ 3	Zahlentheorie in faktoriellen Ringen und in Hauptidealringen . . . . .	126
	1. Zahlentheorie in faktoriellen Ringen – 2. Theorie des größten gemeinsamen Teilers – 3. Integritätsringe mit ggT – 4. Charakterisierung faktorieller Ringe. Zerlegungssatz für noethersche Ringe	

## Kapitel 4

**Der  $g$ -adische Algorithmus**

Einleitung

§ 1	$g$ -adische und Cantorsche Darstellung natürlicher Zahlen . . . . .	139
	0. Historisches Präludium – 1. Existenz und Eindeutigkeit der $g$ -adischen Darstellung – 2. Rechnen im $g$ -adischen System – 3*. Cantorsche Darstellung natürlicher Zahlen	
§ 2	$g$ -adische Darstellung rationaler Zahlen . . . . .	148
	1. $g$ -adischer Algorithmus – 2. Endliche $g$ -adische Darstellungen – 3. Periodische $g$ -adische Darstellungen	
§ 3	Periodizitätssätze. Satz von FERMAT-EULER . . . . .	158
	1. Kriterien für reine Periodizität – 2. Charakterisierung von Vorperioden und Perioden – 3. Zyklische Ziffernverschiebung – 4. Satz von FERMAT-EULER	
§ 4*	(Anhang) $g$ -adische Entwicklung als Approximationsverfahren . . . . .	168
	1*. Approximationskriterium – 2*. Konstruktion von Brüchen zu $g$ -periodischen Folgen – 3*. $g$ -adische Entwicklungen und unendliche Reihen	

## Kapitel 5

**Kongruenzen und Restklassenringe**

Einleitung

§ 1	Kongruenzenrechnung . . . . .	179
	1. Kongruenzrelation. Elementares Rechnen mit Kongruenzen – 2. Kongruenzen zu verschiedenen Moduln – 3. Neuner- und Elferprobe –	

4. Der Satz von FERMAT-EULER als Kongruenzsatz – 5. Anwendung des Satzes von FERMAT-EULER in der Kryptographie

§ 2 Satz von WILSON. Chinesischer Restsatz . . . . . 192  
 1. Lineare Kongruenzen – 2. Der Satz von WILSON – 3. Ein Satz von EULER – 4. Chinesischer Restsatz

§ 3 Restklassenringe und Polynomkongruenzen . . . . . 201  
 1. Restklassenringe – 2. Primideale und maximale Ideale –  
 3. Polynomkongruenzen und Polynomgleichungen – 4. Satz von LAGRANGE

**Kapitel 6**

**Prime Restklassengruppen**

Einleitung

§ 1 Elementare Gruppentheorie . . . . . 213  
 1. Gruppenbegriff. Beispiele aus der Zahlentheorie – 2. Untergruppen, Kongruenz, Ordnung einer Gruppe – 3. Ordnung eines Gruppenelementes – 4. Verallgemeinerungen der Sätze von FERMAT-EULER und WILSON

§ 2 Zyklische prime Restklassengruppen . . . . . 223  
 1. Allgemeines Zyklizitätskriterium – 2. Existenz von Primitivwurzeln zu Primzahlen – 3. Zyklizität der Gruppen  $\mathbb{Z}_{p^n}^*$  – 4. Kleine Primitivwurzeln zu  $p^n$  – 5. Zyklizität der Gruppen  $\mathbb{Z}_{2p^n}^*$  – 6. Bestimmung aller zyklischen Gruppen  $\mathbb{Z}_m^*$

**Kapitel 7**

**Theorie der quadratischen Reste**

Einleitung

§ 1 Quadratische Reste . . . . . 237  
 1. Quadratische Reste modulo einer beliebigen Zahl  $m > 1$  –  
 2. Quadratische Reste modulo Primzahlpotenzen – 3. Quadratische Reste modulo einer ungeraden Primzahl – 4. Legendresches Restsymbol –  
 5. Gaußsches Lemma

§ 2 Quadratisches Reziprozitätsgesetz . . . . . 248  
 1. Formulierung des Reziprozitätsgesetzes. Beispiele – 2. Beweis des Reziprozitätsgesetzes – 3\*. Analytischer Beweis des Reziprozitätsgesetzes nach EISENSTEIN – 4. Das Reziprozitätsgesetz für das Jacobische Restsymbol – 5. Anwendungen des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes

Literatur . . . . . 266

Namenverzeichnis . . . . . 267

Sachverzeichnis . . . . . 269

Symbolverzeichnis . . . . . 274