

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorrede	V
Gelcitwort des Herausgebers.	VII
Inhaltsverzeichnis	XI
Einleitung	1

Erstes Kapitel.

Die binären quadratischen Formen.

1. Ungleichheiten zur Definition der reduzierten Formen. Endliche Anzahl von Klassen ganzzahliger Formen für jede Determinante . . .	2
2. Die Formen (a, b, c) durch die Punkte einer Ebene repräsentiert; die positiven Formen als Punkte eines Kreisinnern	5
3. u. 4. Die Zerlegung des Kreises in äquivalente Elementardreiecke; der reduzierte Raum. Genauere Definition der reduzierten positiven Formen. Jede positive Form ist einer einzigen solchen äquivalent	8
5. Darstellung der unbestimmten Formen als Polaren äußerer Punkte des Kreises. Ketten äquivalenter reduzierter Formen; äquivalente Formen haben dieselbe Kette. Der Fall periodischer Ketten	14
6. Äquivalente Zahlen	17
7. Abbildung der Kreisfigur zur Darstellung der positiven Formen als Punkte einer Halbebene	20
8. Zerlegung der letzteren in äquivalente Felder; das reduzierte Feld.	22
9. Zusammensetzung der unimodularen Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ aus zwei fundamentalen	23
10. Die Behandlung der unbestimmten Formen mittels kontinuierlicher Reduktion zugeordneter positiver Formen nach Hermite	26

Zweites Kapitel.

Gitter und Kettenbrüche.

1. Die Werte einer reellen Veränderlichen als Punkte einer Geraden. Einfaches Prinzip von Dirichlet	28
2. Die Wertsysteme zweier reellen Veränderlichen als Punkte einer Ebene. Das ebene Gitter. Fundamentalparallelogramm. Eingelagerte Gitter. Punktgitter und die ihm eigenen Parallelgitter	29
3. Der Minkowskische Grundsatz	32
4. Das System zweier Linearformen $\xi = ax + by, \eta = cx + dy$. Die Parallelogramme $[\lambda, \mu]$. Freie und äußerste Parallelogramme	33
5. u. 6. Fundamentale Sätze von solchen Parallelogrammen	34
7. Fortgang von einem äußersten zu einem ihm benachbarten durch Heben oder Senken der Seiten. Die Kette äußerster Parallelogramme	38
8. Die zu den Parallelogrammen gehörigen unimodularen Substitutionen	41
9. Der Algorithmus zur Bildung der Kette	43

XII	Inhaltsverzeichnis	Seite
10.	Wann für zwei Linearformen ξ, η die Substitutionen von einer Stelle an mit denen für ξ, η übereinstimmen. Annäherung an $\frac{b}{a}$ mittels der Kette	45
11. u. 12.	Zusammenhang der Kette mit der Theorie der gewöhnlichen Kettenbrüche	47
13.	Das Umrißpolygon	51
14.	Annäherung an eine Irrationelle ω durch rationale Brüche $\frac{x}{y}$ mit dem Annäherungsgesetz $\left \frac{x}{y} - \omega \right < \frac{1}{y^2}$ nach Dirichlets Prinzip, nach Hermite. Relative Minima des Ausdrucks $x - y\omega$	58
15.	Die Annäherung $\left \frac{x}{y} - \omega \right < \frac{1}{2y^2}$ mittels der Näherungsbrüche für ω (Lagrange)	54
16.	Die Annäherung $\left \frac{x}{y} - \omega \right < \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{y^2}$, nach Hurwitz und Borel	55
17.	Die Annäherung $ x - \omega y - \Omega < \frac{1}{2 y }$ von Tschebischeff, nach Hermite hergeleitet	63
18.	Allgemeiner die Annäherung $ (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) \leq \frac{1}{4}$ für zwei Linearformen ξ, η und gegebene ξ_0, η_0 nach Minkowski. Arithmetischer Beweis ihrer Möglichkeit nach Remak	65

Drittes Kapitel.

Die Reduktion unbestimmter binärer Formen.

1. Die Reduktion der Form

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x - \omega_1 y)(x - \omega_2 y)$$

nach Hermite durch kontinuierliche Reduktion der zugeordneten positiven Form

$$F = (x - \omega_1 y)^2 + \lambda^2 (x - \omega_2 y)^2$$

für alle Werte von λ . Der Komplex (f) reduzierter Formen. Äquivalenten Formen entsprechen gleiche Komplexe 69

2. Transformation der Formen des Komplexes ineinander; allgemeiner Ausdruck derselben mittels zweier fundamentalen Substitutionen. Hermites Hauptreduzierte 73

3. Reduktion mittels der äußersten Parallelelogramme der Formen $\xi = x - \omega_1 y, \eta = \frac{a}{2\sqrt{D}}(x - \omega_2 y)$ nach Minkowski; Definition der reduzierten Formen; die Kette der äquivalenten reduzierten Formen 76

4. Sellings Bestimmung reduzierter positiver Formen mittels eines Tripels von Formen $(a, f, b), (b, g, c), (c, h, a)$; die Form

$$-gu^2 - hv^2 - fw^2;$$

Reduktionsbedingung: g, h, f nicht positiv 80

5. Zugeordnetes Tripel $(a, k, b), (b, g, c), (c, h, a)$ unbestimmter Formen; Sellings Hauptreduzierte 82

6—8. Gauss' Reduktionsmethode mittels benachbarter Formen; Zusammenhang mit der Theorie der Kettenbrüche, nach Frobenius. 85

9. u. 10. Periodizität der Kette äußerster Parallelogramme und automorphe Substitutionen einer Form. Arithmetischer Charakter der quadratischen Irrationellen 92

11. Auflösung der Pellischen Gleichung mittels der Kette 95

12. Eine Auflösung derselben nach Hermite 97

13. Die Diagonalkettenbrüche von Minkowski 100

14. Die Hurwitzschen Kettenbrüche erster und zweiter Art. Andere Kettenbrüche von Fueter 103

Viertes Kapitel.

Über die Minima unbestimmter binärer Formen.

1. Die Reihe der benachbarten reduzierten Formen

$$F_i = ((-1)^i A_i, B_i, (-1)^{i+1} A_{i+1}).$$

Der Ausdruck $K_i = \frac{2\sqrt{D}}{A_{i+1}} = \mathfrak{R}(g_i; g_{i+1}, \dots) + \mathfrak{R}(0; g_{i-1}, g_{i-2}, \dots)$

Bedingung dafür, daß $K_i \geq 3$ bleibt. Die Reihe der bezüglichen g_i :

(G) $\dots 2\mu_{-2} \cdot 1, 2, 2, 2\mu_{-1} \cdot 1, 2, 2, 2\mu_0 \cdot 1, 2, 2, \dots$. . . 106

2. Weitere Bedingungen, denen die μ_i genügen müssen 111

3. Formenklassen, für welche die obere Grenze der K_i gleich 3, kleiner als 3, kleiner als ein Wert $\theta < 3$ ist; von ihrer Anzahl; die Zahl 3

ist kleinste Häufungsstelle des Ausdrucks $\frac{2\sqrt{D}}{A}$ 118

3a. Anwendung auf die Annäherung $\left| \frac{x}{y} - \omega \right| \leq \frac{1}{\theta y^2}$ 116

4. u. 5. Bildungsgesetz der Reihe (G) für den Fall $K_i < \theta < 3$; ihre Periode $2, 2, \alpha, \alpha, \dots, \alpha, \alpha, 1, 1$;

der Kettenbruch $\mathfrak{R}(2; 1, 1, \alpha, \alpha, \dots, \alpha, \alpha, 2)$ mit den letzten Näherungsbrüchen $\frac{P'}{Q'}, \frac{P}{Q}$; die quadratische Form $(Q, Q' - P, -P)$; Q Minimalwert ihrer Klasse 118

6. u. 7. Bildungsgesetz der Größen Q ; Markoffsche Zahlen als allgemeine Lösung der Gleichung $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 3 X_1 X_2 X_3$ 123

7a. Anordnung der Formen mit gegebener Determinante nach der genauen oberen Grenze ihrer Minima 128

8. Wenn B'_i der absolut kleinste Rest von $B_i \pmod{A_{i+1}}$ und $Q_i = \frac{\sqrt{D}}{|B'_i|}$ ist, wann bleibt $Q_i \geq 2 + \sqrt{5}$ (J. Schur)? 129

9. Der Kettenbruch $\gamma = \mathfrak{R}(0; 1, 1, \dots) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; Fibonacci'sche Zahlen p_i 131

	Seite
10—12. Bedingungen, denen die Zahlen g_i genügen müssen	133
13. Die Zahl $2 + \sqrt{5}$ ist kleinste Häufungsstelle des Ausdrucks $\frac{\sqrt{D}}{B}$; seine kleineren Werte sind die Zahlen $\sqrt{13 + \frac{8p_{2i}}{p_{2i+1}}}$	138

Fünftes Kapitel.

Die Gitter binärer quadratischer Formen.

1. Neue Einführung des ebenen Gitters	140
2. Das einem eingelagerten Gitter angepaßte ebene Punktgitter. Entsprechender Satz über lineare Substitutionen	142
3. Die reduzierte Gestalt des Punktgitters	144
4. Dirichlets Sechseck der einem Gitterpunkte nächstliegenden Punkte der Ebene	145
5. Das Gitter der Form (a, b, c) . Die Gitterzahlen $x\sqrt{a} + \frac{b \pm \sqrt{D}}{\sqrt{a}}y$	147
6. Verschiedene geometrische Bedeutung derselben für die Fälle bestimmter und unbestimmter Formen	149
7. Transformation des Gitters mittels einer linearen Substitution. Das Gitter als Abbild einer Formenklasse	151
8. Zwei ausgezeichnete Fälle, Zusammenhang mit der Theorie der algebraischen Zahlkörper	155
9. Transformation des Gitters durch Automorphismen der Form	157
10. Reduktion der Formen, reduziertes Gitter nach Lagrange, nach Selling	161
10a. Grenzformen; dichteste Lagerung gleicher Kreise in der Ebene	162
11. u. 12. Die Komposition der Formen, Formenklassen und Gitter	164
13. Die Hauptklasse, entgegengesetzte Klassen. Die Gruppe der Gitter, Fundamentalgitter	171
14. Kleins Orientierung der Gitter zwecks ihrer Zusammensetzung	173

Sechstes Kapitel.

Raumgitter und positive ternäre quadratische Formen.

1. Das Raumgitter und sein analytischer Ausdruck. Grundparallelepiped; dasjenige eines eingelagerten Gitters ein M -faches des ersteren	175
2. Bedeutung von M	177
3. Das einem eingelagerten Gitter angepaßte Raumgitter. Entsprechender Satz über lineare Substitutionen	178
4. Die reduzierte Gestalt des Raumgitters	180
5. Jedem Raumgitter ist eine positive ternäre Form und ihre Adjungierte zugeordnet	182
6. Geometrische Beziehungen zu einem Tetraeder, nach Gauss und Selling	185
7. Jeder positiven ternären Form entspricht ein Raumgitter als Abbild ihrer Klasse	188
8. Die Reduktion solcher Formen. Seebers Reduktionsbedingungen nach Dirichlet abgeleitet	191
9. Dirichlets Beweis des Seeberschen Satzes $abc \leq 2D$. Endliche Anzahl Klassen äquivalenter ganzzahliger Formen mit gegebener Determinante	194

10. Minimum M einer Klasse; $\frac{M}{\sqrt[3]{D}} \leq \sqrt[3]{2}$; Grenzformen; dichteste Lagerung gleicher Kugeln im Raume als Folgerung 196
11. Der Minkowskische Grundsatz für den Fall des Raumgitters 197
12. Die Strahldistanz. Überall nach außen konvexe geschlossene Flächen 198
- 12a. Anwendung auf das System von drei reellen Linearformen. Der besondere Fall der Formen $x - \omega z, y - \Omega z, \frac{z}{\theta}$. Die Annäherungen

$$\left| \frac{x}{z} - \omega \right| \leq \frac{1}{z \sqrt{z}}, \left| \frac{y}{z} - \Omega \right| \leq \frac{1}{z \sqrt{z}} \dots \dots \dots 200$$

13. Herleitung ähnlicher Formeln durch Hermite aus der Reduktion der Formen

$$(x - \omega z)^2 + (y - \Omega z)^2 + \frac{z^2}{\theta^2}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{\theta^2} + (\omega x + \Omega y + z)^2 \dots \dots \dots 202$$

14. Minkowskis genauere Annäherungen

$$\left| \frac{x}{z} - \omega \right| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z \sqrt{z}}, \left| \frac{y}{z} - \Omega \right| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z \sqrt{z}} \dots \dots \dots 205$$

15. Verschärfung der Tschebischeffschen Annäherung (Kap. 2, 17) durch Hermite 207

16. Herleitung der Schranke $\frac{M}{\sqrt[3]{D}} \leq \sqrt[3]{\frac{86}{\pi^2}}$ nach Minkowski 209

17. Aus der genauen Schranke in Nr. 10 ergeben sich umgekehrt die Seeberschen Sätze über Reduktion 211

- 18—22. Desgleichen diese Schranke selbst umgekehrt mittels der dichtesten Lagerung gleicher Körper. Gitteroktaeder; zwei Arten derselben. Analytische Bedingungen für die dichteste Lagerung in unendlicher Anzahl, ihre Zurückführung auf eine endliche Anzahl. Diese führen im Falle gleicher Kugeln zu der gedachten Schranke 214

Siebentes Kapitel.

Der n -dimensionale Raum.

1. Der Punkt. Spanne zweier Punkte; Strahldistanz $S(x)$ 224
2. Endlicher Raumteil. Ebene, Würfel. Volumen. Parallelepiped und sein Inhalt 225
3. Raumgitter und Gitterpunkte. Eichkörper $S(x) \leq 1$ einer Strahldistanz $S(x)$, Eichfläche $S(x) = 1$ 229
4. Kongruente Körper. Stufen des Raumes 232
5. Der allgemeine Minkowskische Grundsatz. Zwei Deutungen desselben 234
6. Allgemeiner Satz über Linearformen mit reellen Koeffizienten. Ausdehnung auf solche mit komplexen Koeffizienten 236

7. Das Beispiel der Formen

$$x_1 - \omega_1 x_n, x_2 - \omega_2 x_n, \dots, x_{n-1} - \omega_{n-1} x_n, \frac{x_n}{\theta^n};$$

die Annäherungen $\left| \frac{x_i - \omega_i}{x_n} \right| < \frac{1}{|x_n|^{n-1}}$, genauer $< \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{|x_n|^{\frac{n-1}{n}}}$.

Ergänzender Satz von Borel 239

8 u. 9. Der durch eine Anzahl linearer Ungleichheiten begrenzte Raumteil R . Äußerste Lösungen; Kanten von R ; jede andere Lösung durch die äußersten linear darstellbar. Innere Punkte 243

10. Das dem Gebiete R zugeordnete Gebiet \mathfrak{K} , seine Kanten und Wände. Reziproke Beziehung von R und \mathfrak{K} zueinander 243

Achstes Kapitel.

Die positiven quadratischen Formen mit n Unbestimmten.

1. Die Form

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(i,j)=1,2,\dots,n} a_{ij} \cdot x_i x_j;$$

verschiedene Darstellungen derselben mittels Quadraten von Linearformen. Die Ungleichheit $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \geq D$. Endliche Anzahl der ganzzahligen x_i , für welche $f \leq G$, sowie der automorphen Substitutionen für f . Existenz eines Minimum M von f 250

2. Die allgemeine Hermitesche Ungleichheit $M \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt[n]{D}$ 253

3. Eine Definition reduzierter Formen von Hermite; Herleitung dieser Reduzierten für eine gegebene Form 255

4 u. 4a. Eine zweite Hermitesche Bestimmung reduzierter Formen. Hermitesche Reduzierte; in ihnen ist $a_{11} < a_{22} \leq \dots \leq a_{nn}$ und $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} < \lambda_n \cdot D$, wo λ_n nur von n abhängt. Beweis der letzteren Aussage Hermites durch Stoff 258

5. Neuer Ausdruck von $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ als Minima-Form einer Klasse. Daraus neue Herleitung der Hermiteschen Ungleichheit. Endliche Anzahl von Klassen äquivalenter ganzzahliger Formen mit gegebener Determinante 264

6. Verschärfte Hermitesche Ungleichheit. Genaue Schranke für die Fälle $n = 2, 3, 4, 5$, insbesondere für $n = 4$ nach Korkine und Zolotareff 267

7 u. 8. Neue Schranke von Minkowski. Jedem n -dimensionalen Raumbgitter ist eine positive quadratische Form f zugeordnet und umgekehrt. Die Strahldistanz $S(x) = \sqrt{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$. Der Satz

$$M \leq \frac{4 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2/n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt[n]{D} \dots\dots\dots 270$$

Neuntes Kapitel.

Die Reduktion der positiven quadratischen Formen.

1. Allgemeine Bemerkung über das reduzierte Gebiet 277

2. Reduktion nach Minkowski mittels Ungleichheiten, die in den Formkoeffizienten nur linear sind und deren Anzahl zunächst unendlich

ist. Niedrigste und Hermitesche Formen. Jede Klasse enthält eine reduzierte Form 278

3. Innere Formen und Randformen. Das reduzierte Gebiet B und die äquivalenten Kammern B_g ; sie erfüllen den Raum aller Formen einfach und lückenlos 280

4. Zurückführung der unendlich vielen Reduktionsbedingungen auf eine endliche Anzahl, zunächst für die Fälle $n = 2, 3, 4$ 282

5. Dasselbe im allgemeinen Falle. Endliche Anzahl von Klassen äquivalenter ganzzahliger Formen mit gegebener Determinante 285

6. Die Kantenformen, Darstellung aller Reduzierten durch solche. Das reduzierte Gebiet B ist pyramidenförmig mit der Spitze im Nullpunkt 289

7. Die Determinantenfläche $D(f) = c$ 291

Zehntes Kapitel.

Vollkommene und Grenzformen.

1. Die Anzahl μ der Darstellungen $m_1^{(k)}, m_2^{(k)}, \dots, m_n^{(k)}$ des Minimums M einer Form ist $\geq 2^n - 1$. Voronoï's Definition vollkommener Formen und ihrer Klassen 292

2. Zwei Sätze über die Minimaldarstellungen bei vollkommenen Formen 296

3. Die einer vollkommenen Form zugeordneten Linearformen

$$M^{(k)} = \sum_{i=1}^n m_i^{(k)} x_i.$$

Die Anzahl der Klassen vollkommener Formen mit gleichem Minimum ist endlich 299

4. Das einer vollkommenen Form zugeordnete Gebiet R aller Formen

$$\sum_{k=1}^{\mu} q_k \cdot (M^{(k)})^2,$$

seine Kanten und Wände 301

5. Anliegende Gebiete zweier vollkommenen Formen 305

5a. An jeder Wand des der vollkommenen Form zugeordneten Gebietes R liegt aber auch stets das Gebiet R' einer anderen vollkommenen Form an 307

6. Die Gesamtheit (R) der sämtlichen vollkommenen Formen mit gleichem Minimum zugehörigen Gebiete R erfüllt den Raum der positiven Formen einfach und lückenlos 309

7. Klassen äquivalenter Gebiete R ; Repräsentanten derselben Neue Definition reduzierter Formen, Zurückführung einer gegebenen Form auf eine Reduzierte 311

8. Die besondere Form $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$ 313

9. Die Fälle $n = 2, 3$. Bemerkung über die Fälle $n = 4, 5$ 316

10. Maxima des Ausdrucks $\frac{M}{\sqrt{D}}$; sein absolutes Maximum L gibt die genaue Grenze der Hermiteschen Ungleichheit. Definition der Grenzformen; sie sind vollkommene Formen 318

11. Notwendige Bedingung dafür, daß eine Form f eine Grenzform sei 321

	Seite
12. Sie ist auch die dazu ausreichende	322
13. Relative Grenzformen bezüglich des reduzierten Gebiets B (Kap. 9, 3). Minkowskis Bedingung für Grenzformen	324
14. Untersuchungen von Korkine und Zolotareff über das Maximum L . Für $n = 2, 3, 4, 5$ ist $L = \sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[5]{3}$ bzw.	326
15—17. Skizze einer zweiten Untersuchung von Voronoï, anknüpfend an das Dirichletsche Sechseck Das Gebiet der Punkte (α_p) , für welche	

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq 0$$

für alle ganzzahligen x_i ist; Zurückführung auf eine endliche Anzahl von Ungleichheiten. Paralleloeder; jeder quadratischen Form kommt ein solches zu. Zerlegung des n -dimensionalen Raumes in gitterförmig gelagerte kongruente Paralleloeder. Verteilung der Paralleloeder in verschiedene Typen T , diejenige der zu demselben Typ gehörigen Formen in Gebiete \mathcal{A} ; Klassen äquivalenter Gebiete, Repräsentanten derselben, welche den reduzierten Raum repräsentieren 328

Elftes Kapitel.

Von Äquivalenz und Klassen positiver quadratischer Formen.

1. Anwendungen der Reduktionstheorie. Erste Anwendung: Feststellung der Äquivalenz von Formen Automorphe Substitutionen einer Form f	335
2. Die Anzahl $t(f)$ der letzteren; zwei einfache Fälle; $t(f) < (2^{n+1} - 2)^n$.	336
3. Ein Hilfssatz über ganzzahlige lineare Substitutionen von endlicher Ordnung	337
4. Hilfssätze der Gruppentheorie. $t(f)$ ist Teiler der Ausdrücke	

bzw.

$$2 p^{\binom{n-1}{2}} \cdot (p^2 - 1) (p^4 - 1) \dots (p^{n-1} - 1)$$

$$p^{\frac{n(n-1)}{4}} \cdot (p^2 - 1) (p^4 - 1) \dots (p^n - 1)$$

für jede Primzahl $p \leq n + 1$, je nachdem n ungerade oder gerade ist 339

5. Hieraus folgt $t(f)$ als Teiler der Zahl

$$\bar{n} = \prod_{q \leq n+1} q \left[\frac{n}{q-1} \right] + \left[\frac{n}{q-1} \right] + \left[\frac{n}{q^2(q-1)} \right] + \dots \dots \dots 341$$

6. Ausdruck von \bar{n} durch Bernoullische Zahlen 342

7 u. 8. Weitere Hilfssätze über ganzzahlige lineare Substitutionen und
endliche Gruppen derselben. Die Ordnung einer jeden solchen teilt

$$2^v (2^n - 1) (2^n - 2) \dots (2^n - 2^{n-1}), v \leq n.$$

Dies gilt also auch für $t(f)$ 344

9. Äquivalenz von Formen schlechthin, eigentliche Äquivalenz,
Dichtigkeit einer Klasse äquivalenter Formen, vollständige Äqui-
valenz, Verhältnis der bezüglichen Klassenanzahlen 348

10. Ganzzahlige Formen. Eine dritte Hermitesche Definition reduzierter
Formen 350

11. Ungleichheiten, welche daraus folgen	358
12. Nachweis der Klassenanzahl 1 für die Formen mit der Determinante 1 in den Fällen $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Für $n \geq 8$ gibt es mindestens $\left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil + 1$ Klassen	355
13–15. Herleitung der Ausdrücke von Eisenstein für die Anzahl von Klassen positiver ternärer quadratischer Formen. Die Anzahl der automorphen Substitutionen ist eine der Zahlen 1, 2, 4, 6, 8, 12, 24; jede Form mit mehr als einer solchen ist äquivalent mit einer Form $\begin{pmatrix} 2a, a', a'' \\ b, 0, a \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, 0, 0 \end{pmatrix}$	358
16–21. Zurückführung der Anzahl der Klassen auf das Maß derselben. Ihre Bestimmung für die Formen des Hauptgeschlechts mit einer ungeraden Primzahldeterminante $p > 3$	365

Zwölftes Kapitel.

Die zerlegbaren Formen.

1. Zweite Anwendung: Reduktion der zerlegbaren ganzzahligen Formen

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n);$$

ihre Invariante 378

2. Arithmetische Natur der Koeffizienten a_{ik} 382

3. Darstellung der Formen in der Gestalt $F = \prod_{i=1}^{\mu} R_i \cdot \prod_{i=1}^{\nu} S_i S'_i, \mu + 2\nu = n$ 384

4. Zugeordnete positive quadratische Form

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i R_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i S_i \cdot \beta'_i S'_i.$$

Definition der reduzierten Formen F' . Ihre Anzahl bei gegebener
Invariante ist endlich, desgleichen die Anzahl von Klassen äquivalenter
Formen 386

5. Eine Folgerung aus der Hermiteschen Ungleichheit und deren An-
wendung auf die Darstellung der Primzahlen $5k + 1, 7k \pm 1$ als
Normen komplexer Zahlen 389
6. Weitere Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper 392
- 7 u. 8. Herleitung der Automorphien einer zerlegbaren Form mittels
kontinuierlicher Reduktion der zugeordneten Form φ 395
9. Die eigentlichen Automorphien der Hauptform, und die Einheiten
eines Zahlkörpers. Ihre Zusammensetzung aus fundamentalen . . 400
10. Dasselbe für die übrigen Formen 403

Dreizehntes Kapitel.

Die quadratischen und kubischen Irrationellen.

1. Annäherung an eine reelle Irrationelle ω mittels kontinuierlicher Reduk-
tion der Form

$$(x - \omega y)^2 + \lambda^2 y^2.$$

Arithmetischer Charakter einer quadratischen Irrationellen 408

2. Die kontinuierliche Reduktion der Form

$$(x - \omega_1 y)^2 + \lambda^2 (x - \omega_2 y)^2$$

für zwei reelle Irrationellen ω_1, ω_2 . Arithmetischer Charakter eines Paares konjugierter reeller quadratischer Irrationellen 411

3. Sellings Definition einer reduzierten positiven ternären Form $f(x, y, z)$. Die Variierte $\bar{f}(x, y, z, t) = f(x-t, y-t, z-t)$ 414
4. Jede Klasse enthält eine Reduzierte 416
5. Kubische Irrationellen und Tripel solcher Irrationellen von zwei verschiedenen Arten. Kontinuierliche Reduktion der Form

$$(x + \omega_1 y + \omega_1^2 z)^2 + \lambda^2 (x + \omega_2 y + \omega_2^2 z)(x + \omega_3 y + \omega_3^2 z)$$

für ein Tripel $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ der ersten Art 418

6. Arithmetischer Charakter eines solchen Tripels 422
- 7 u. 8. Herleitung der Einheiten eines reellen kubischen Körpers, dessen Konjugierte imaginär sind 426
9. Reduktion der Form

$$(x + \omega_1 y + \omega_1^2 z)^2 + \lambda^2 (x + \omega_2 y + \omega_2^2 z)^2 + \mu^2 (x + \omega_3 y + \omega_3^2 z)^2$$

für ein Tripel $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ der zweiten Art 429

10. Einführung der Sellingschen Reduktionsweise; geometrische Deutungen 432

Vierzehntes Kapitel.

Der verallgemeinerte Kettenbruchalgorithmus.

1. Approximative Lösung der Gleichung $x\omega + y\Omega + z = 0$ in ganzen x, y, z 434
2. Jacobis Kettenbruchalgorithmus, verallgemeinert durch Perron . . . 436
3. Formale Gesetze einer Jacobi-Kette 438
4. Über Konvergenz und unbedingte Konvergenz des Kettenbruchalgorithmus 440
5. Ausgezeichneter Fall unbedingter Konvergenz 442
6. Unbedingte Konvergenz der Jacobi-Ketten. Näherungsbrüche . . . 444
7. Zwei besondere Sätze für den Kettenbruchalgorithmus 446
8. Regelmäßige Algorithmen. Allgemeinerer Fassung der Konvergenz . 448
9. Periodizität eines regelmäßigen Algorithmus. Die charakteristische Determinante und charakteristische Gleichung $f(\varrho) = 0$ 449
10. Die aus den Unterdeterminanten der charakteristischen Determinante gebildete Determinante. Reguläre Gleichungen $f(\varrho) = 0$; ihre Hauptwurzel ϱ_0 ; eine wesentliche Eigenschaft der letzteren im Falle der Periodizität; Ausdruck der Näherungsbrüche durch ϱ_0 451
11. Die Irrationellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ eines periodischen Algorithmus sind Zahlen des aus ϱ_0 gebildeten Körpers von einem Grade $\geq n + 1$. Über Irreduktibilität von $f(\varrho) = 0$ 453
12. Für den Fall der Irreduktibilität ist $P_0 + P_1 \alpha_1 + \dots + P_n \alpha_n = 0$ in ganzzahligen P_i unmöglich 455
13. Das Näherungsgesetz eines periodischen regelmäßigen Algorithmus 457

14. Bedingung dafür, daß es mit dem Gesetze (Kap. 7, 7) übereinstimmt. Sie ist nur erfüllt für eine reelle quadratische Irrationelle α oder für zwei reelle kubische Irrationellen α_1, α_2 der ersten Art 460

Fünfzehntes Kapitel.

Minkowskis Charakteristik algebraischer Zahlen.

1. Der für eine Größe α gebildete Ausdruck
- $$\xi = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \dots + \alpha^{n-1} x_n$$
- und seine relativen Minima 468
2. Ein Hilfssatz über lineare Substitutionen 465
3. Bildung der Minkowski-Ketten von Substitutionen S_1, S_2, S_3, \dots und zugehörigen Linearformen X_1, X_2, X_3, \dots . Der Minkowskische Satz zur arithmetischen Charakteristik einer Irrationellen n^{ten} Grades. 468
4. Allgemeiner zahlengeometrischer Hilfssatz zum Beweise 470
- 5—7. Nachweis der im Satze angegebenen Eigenschaft für jede Irrationelle n^{ten} Grades 472
8. Sie kommt auch nur solchen zu 479
9. Ein auf die Minkowski-Ketten bezüglicher Determinantensatz 481
10. Die Frage nach der Periodizität der Kette. Notwendige Bedingung dafür bei Irrationellen α vom Grade n 484
11. Dieselbe reicht dazu auch aus 489
12. Von den Körpern, denen eine solche Zahl α angehören muß. Ausgezeichnete Fälle der aus einer reellen quadratischen oder aus einer reellen kubischen Irrationellen erster Art gebildeten Körper 491
13. Rückblick 498

Sechzehntes Kapitel.

Die unbestimmten quadratischen Formen mit mehr als zwei Unbestimmten.

1. Dritte Anwendung: die Reduktion der unbestimmten Formen. Ternäre Formen. Darstellung der Form $f = \begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix}$ nach Selling in der Gestalt $f = U^2 - V^2 - W^2$ mit
- $$U = \xi x + \eta y + \zeta z, \quad V = \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z, \quad W = \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z$$
- 494
2. Die zugeordnete positive Form $f = U^2 + V^2 + W^2$ 496
3. Reduktion der Formen f durch kontinuierliche Reduktion der zugeordneten Form f . Die Komplexe (f) und (\bar{f}) 498
4. Die Komplexe äquivalenter Formen bestehen aus denselben Formen. Die zugehörige Hyperboloidschale und ihre Einteilung in äquivalente Felder 500
5. Sellings Reduktionsbedingungen mittels der Variierten von f . Spaltungs- und Kreuzungspunkte der äquivalenten Felder 501
6. In jeder Klasse ist eine Reduzierte, die einem Kreuzungspunkte entspricht 504
7. Endliche Anzahl von Klassen ganzzahliger unbestimmter ternärer Formen mit gegebener Determinante 506

	Seite
8. Automorphe Substitutionen der ganzzahligen Formen und ihre Zusammensetzung aus fundamentalen	508
9. Formen mit n Unbestimmten. Darstellung durch Quadrate von Linearformen; zugeordnete positive Formen. Reduzierte Formen. Die Komplexe (f) und (f)	510
10—12. Nachweis für die nur endliche Anzahl der nicht äquivalenten Klassen bei gegebener Invariante, nach Stouff	513
13. Vereinfachung. Kurze Bemerkung über die automorphen Substitutionen	518
14—18. Markoffs Satz über obere Grenzen für die Minima unbestimmter ternärer Formen und sein Beweis	520
Autorenverzeichnis	532
Sachverzeichnis	534