

Inhalt

1 Grundlagen	1
1.1 Mengen	1
1.2 Abbildungen, Funktionen	7
1.3 Körper	10
1.4 Geordnete Körper	16
1.5 Vollständige Induktion	23
1.6 Folgen und Reihen in geordneten Körpern	27
1.7 Beispiele von Folgen und Reihen in \mathbb{Q}	34
1.8 CAUCHY-Folgen in geordneten Körpern	38
1.9 Relationen, Klasseneinteilungen von Mengen	43
1.10 Konstruktion der reellen Zahlen	45
1.11 Die Körpereigenschaften von \mathbb{R}	47
1.12 Die Ordnung in \mathbb{R}	50
1.13 Einbettung von \mathbb{Q} in \mathbb{R}	52
1.14 Die Vollständigkeit von \mathbb{R}	56
1.15 Der Hauptsatz über monotone Folgen; die Zahl e	60
1.16 Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen	66
1.17 Das Rechnen mit Näherungswerten	70
2 Funktionen einer reellen Variablen	75
2.1 Mächtigkeit von Mengen	75
2.2 Metrische Räume	80
2.3 Umgebungen, offene, abgeschlossene und kompakte Mengen	84
2.4 Häufungspunkte	92
2.5 Der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS für \mathbb{R}	94
2.6 Der Satz von HEINE-BOREL für \mathbb{R}	96
2.7 Supremum und Infimum von Mengen	97
2.8 Verdichtungspunkte; Limes superior und Limes inferior von Folgen	102
2.9 Abbildungen, Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit	107
2.10 Reellwertige Funktionen auf metrischen Räumen	115
2.11 Reellwertige Funktionen einer reellen Variablen	121
2.12 Grenzwerte von Funktionen	123

X	Inhalt
2.13	Monotone Funktionen 128
2.14	Monotone Funktionen und Umkehrfunktionen 132
3	Potenz, Exponentialfunktion, Logarithmus 134
3.1	Potenzen mit ganzen Exponenten 134
3.2	Potenzen mit rationalen Exponenten 136
3.3	Potenz- und Exponentialfunktion mit rationalen Exponenten . . 140
3.4	Potenz- und Exponentialfunktion mit reellen Exponenten 141
3.5	Der Logarithmus 145
3.6	Stetigkeit der allgemeinen Potenz 146
3.7	Die Exponentialfunktion und die Zahl e 147
4	Differentialrechnung 151
4.1	Motivierung 151
4.2	Definition der Ableitung; einfache Eigenschaften 152
4.3	Ableitungsregeln 157
4.4	Ableitung von $\log_b x$, b^x , x^a 161
4.5	Der Satz von ROLLE 163
4.6	Der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung 165
4.7	Der 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung 170
4.8	Die Regeln von de l'HOSPITAL 171
5	Integralrechnung 176
5.1	Die Idee des RIEMANNSchen Integrals 176
5.2	Eigenschaften von Ober- und Untersummen 179
5.3	Untere und obere RIEMANN-DARBOUX-Integrale 182
5.4	Das RIEMANNSche Integral 186
5.5	RIEMANNSche Summen 190
5.6	Eigenschaften des RIEMANNSchen Integrals 196
5.7	Integration auf Teilintervallen 202
5.8	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 205
5.9	Das unbestimmte Integral 211
5.10	Bestimmte Integration durch Substitution und partielle Integration 218
5.11	Die Mittelwertsätze der Integralrechnung 221
5.12	Der TAYLORSche Satz 225
5.13	Die TAYLORreihen einiger elementarer Funktionen 231
5.14	Extrema differenzierbarer Funktionen 235
5.15	Bogenlänge ebener Kurven 239
5.16	Uneigentliche Integrale 244

Inhalt	XI
5.17 Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale	247
5.18 Die Gammafunktion	252
6 Die Trigonometrischen Funktionen	258
6.1 Das Bogenmaß von Winkeln	258
6.2 Analytische Definition des Bogenmaßes und der Funktionen $\sin t$, $\cos t$	260
6.3 Die Funktionen $\tan t$ und $\cot t$	267
6.4 Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen	269
6.5 Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen	272
7 Einige elementare Methoden der angewandten Mathematik	277
7.1 Das Problem der Nullstellenbestimmung, die Regula falsi	277
7.2 Ein allgemeines Näherungsverfahren	278
7.3 Das NEWTONSche Verfahren	282
7.4 Das Interpolationsproblem	288
7.5 Die LAGRANGESche Interpolationsmethode	289
7.6 Die NEWTONSche Interpolationsmethode	290
7.7 Fehlerabschätzung bei Approximation durch Interpolation	295
7.8 Numerische Integration durch Interpolation	298
7.9 Die Trapez- und SIMPSON-Formel	299
7.10 Die Große Trapez- und SIMPSON-Formel	305
8 Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen	311
8.1 Der Raum \mathbb{R}^n , Funktionen mehrerer Variablen	311
8.2 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung	313
8.3 Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, Richtungsfelder	315
8.4 Die Differentialgleichung $y' = f(x) \cdot g(y)$ (Getrennte Veränderliche)	316
8.5 Die Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$	321
8.6 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	334
8.7 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	344
8.8 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	348
8.9 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	354
Sachregister	362