

---

# Inhaltsverzeichnis

A.	Allgemeine Vorbemerkungen . . . . .	13
1.	Gegenstand der Untersuchung . . . . .	13
2.	Erkenntnistheoretisches. Axiomatisierung . . . . .	14
3.	Literatur . . . . .	15
B.	Logische Grundbegriffe. Mengen, Abbildungen, Relationen . . . . .	17
1.	Logische Grundbegriffe . . . . .	17
2.	Mengen . . . . .	18
2.1.	Mengenbegriff . . . . .	18
2.2.	Operationen mit Mengen . . . . .	19
2.3.	Rechenregeln . . . . .	21
	Aufgaben . . . . .	23
3.	Abbildungen . . . . .	24
3.1.	Grundbegriffe . . . . .	24
3.2.	Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen . . . . .	25
3.3.	Zusammensetzung von Abbildungen. Diagramme . . . . .	26
3.4.	Graph einer Funktion. Kartesisches Produkt . . . . .	28
4.	Relationen und Operationen . . . . .	29
4.1.	Binäre Relationen . . . . .	29
4.2.	Äquivalenzrelationen . . . . .	31
4.3.	Mächtigkeit . . . . .	33
4.4.	$n$ -stellige Relationen . . . . .	34
4.5.	Operationen . . . . .	35
	Aufgaben . . . . .	36
C.	Geometrie . . . . .	37
1.	Synthetischer Aufbau der Geometrie . . . . .	37
2.	Analytischer Aufbau der Geometrie . . . . .	41
2.1.	Allgemeines . . . . .	41
2.2.	Analytische Geometrie der Geraden . . . . .	44
2.2.1.	Koordinaten . . . . .	44
2.2.2.	Orientierung der Geraden . . . . .	47
2.2.3.	Teilverhältnis . . . . .	48
2.2.4.	Gruppenbegriff . . . . .	50

2.2.5.	Schwerpunkt. Baryzentrische Koordinaten	52
	Aufgaben	53
2.2.6.	Permutationen. Homomorphie und Isomorphie von Gruppen	53
2.3.	Analytische Geometrie der Ebene. Vektorrechnung	57
2.3.1.	Koordinaten in der Ebene	57
2.3.2.	Geraden der Ebene	58
2.3.3.	Parallelität von Geraden	60
2.3.4.	Geradenbüschel	61
2.3.5.	Zusammenhang mit linearen Gleichungen	62
	Aufgaben	64
2.3.6.	Vektoren	64
2.3.6.1.	Definition der Vektoren	64
2.3.6.2.	Addition von Vektoren	66
2.3.6.3.	Multiplikation von Vektoren mit Zahlen	68
2.3.6.4.	Kollinearität	69
2.3.7.	Koordinaten. Ortsvektoren	70
2.3.8.	Translationen	72
2.3.9.	Geradengleichung in Parameterform	73
2.3.10.	Schwerpunkt. Baryzentrische Koordinaten	74
	Aufgaben	76
2.3.11.	Anwendungen baryzentrischer Koordinaten	77
2.3.11.1.	Ein Hilfssatz	77
2.3.11.2.	Satz von CEVA	79
2.3.11.3.	Satz von MENELAOS	80
	Aufgabe	82
2.3.12.	Skalarprodukt	82
2.3.13.	Kovariante und kontravariante Koordinaten	85
2.3.14.	Längenquadrat. Quadratische Formen. Winkel zwischen Vektoren	88
	Aufgaben	89
2.3.15.	Orientierung der Ebene	90
2.3.16.	Orientierter Flächeninhalt	93
2.3.17.	HESSISCHE Normalform der Geradengleichung	95
	Aufgaben	96
2.4.	Elementare analytische Geometrie des Raumes	96
2.4.1.	Vektoren im Raum. Koordinaten	96
2.4.2.	Ebenengleichung	99
2.4.3.	HESSISCHE Normalform der Ebenengleichung	102
	Aufgaben	103
2.4.4.	Parallelität von Ebenen	103
2.4.5.	Geraden im Raum	104
2.4.6.	Ebenenbüschel	105
2.4.7.	Ebenenbündel. Geradenbündel	106
	Aufgaben	108
2.4.8.	Orientierung des Raumes	108
2.4.9.	Vektorprodukt	109
2.4.10.	Spatprodukt	112
2.4.11.	Entwicklungssätze	114
	Aufgaben	115
3.	Einführung des $n$ -dimensionalen Raumes	116
3.1.	Vektorraum	116
3.1.1.	Definition	116
3.1.2.	Folgerungen aus den Axiomen	117
3.1.3.	Untervektorraum	119

3.1.4.	Abhängigkeit . . . . .	119
3.1.5.	Folgerungen aus den Abhängigkeitssätzen . . . . .	123
3.1.6.	Basis eines Vektorraumes . . . . .	126
	Aufgaben . . . . .	126
3.2.	Affiner Raum . . . . .	127
3.2.1.	Definition des affinen Raumes . . . . .	127
3.2.2.	Affiner Unterraum . . . . .	128
3.2.3.	Koordinatensystem . . . . .	128
3.2.4.	Parameterdarstellung affiner Unterräume . . . . .	129
3.2.5.	Parallelität . . . . .	130
	Aufgaben . . . . .	131
D.	Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und Determinanten . . . . .	132
1.	Begriff des linearen Gleichungssystems, Matrizen . . . . .	132
2.	Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .	133
2.1.	Lineare Abbildungen . . . . .	134
2.2.	Vektorraum der linearen Abbildungen, Matrizenaddition . . . . .	135
2.3.	Hintereinanderausführung linearer Abbildungen, Matrizenmultiplikation . . . . .	136
2.4.	Zusammenfassung . . . . .	138
3.	GAUSSSches Eliminationsverfahren . . . . .	140
	Aufgaben . . . . .	142
4.	Rang . . . . .	143
5.	Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme . . . . .	145
6.	Struktur der Lösung . . . . .	147
	Aufgaben . . . . .	150
7.	Beschreibung von Vektorräumen und affinen Räumen durch lineare Gleichungssysteme . . . . .	151
	Aufgabe . . . . .	153
8.	Lineare Funktionale . . . . .	153
9.	Isomorphie und Homomorphie von Vektorräumen . . . . .	156
10.	Reguläre Matrizen . . . . .	158
11.	Umformung von Matrizen auf Dreiecks- und auf Diagonalgestalt . . . . .	161
12.	Elementarteilersatz . . . . .	162
	Aufgaben . . . . .	165
13.	Determinanten . . . . .	166
13.1.	Motivierung, Allgemeiner Determinantenbegriff . . . . .	166
13.2.	Folgerungen aus der allgemeinen Determinantendefinition . . . . .	166
13.3.	Gerade und ungerade Permutationen . . . . .	168
13.4.	Explizite Determinantendefinition . . . . .	170
13.5.	CRAMERSche Regel . . . . .	173
13.6.	Multiplikationssatz . . . . .	173
13.7.	LAPLACEScher Entwicklungssatz . . . . .	174

13.8.	Adjunktenmatrix . . . . .	176
13.9.	Rangbestimmung mittels Determinanten . . . . .	177
	Aufgaben . . . . .	178
<b>E.</b>	<b>Koordinatentransformationen. Affine und lineare Abbildungen. Orientierung . . . . .</b>	<b>179</b>
1.	Koordinatentransformationen . . . . .	179
1.1.	Übergang zu einer neuen Basis im Vektorraum. Transformation der Vektorkoordinaten . . . . .	179
1.2.	Transformation der Punktkoordinaten . . . . .	181
2.	Affine Abbildungen . . . . .	183
2.1.	Begriff der affinen Abbildung . . . . .	183
2.2.	Geometrische Eigenschaften affiner Abbildungen . . . . .	184
2.2.1.	Verschiedene geometrische Eigenschaften . . . . .	184
2.2.2.	Geometrische Charakterisierung affiner Abbildungen . . . . .	186
2.3.	Bestimmung einer affinen Abbildung durch $n + 1$ Punkte . . . . .	190
	Aufgaben . . . . .	191
3.	Orientierung und Koordinatentransformation . . . . .	192
3.1.	Synthetische Definition der Orientierung . . . . .	192
3.2.	Analytische Charakterisierung der Orientierung . . . . .	193
3.3.	Anwendung auf die Flächeninhalts- und Volumenberechnung . . . . .	196
	Aufgaben . . . . .	197
4.	Lineare Abbildungen . . . . .	197
4.1.	Beschreibung einer linearen Abbildung bezüglich einer beliebigen Basis . . . . .	198
4.2.	Übergang zu neuen Basen . . . . .	199
4.3.	Äquivalenz von Matrizen . . . . .	201
4.4.	Ähnlichkeit von Matrizen . . . . .	202
4.5.	Eigenwertproblem . . . . .	204
4.5.1.	Motivierung. Charakteristische Gleichung . . . . .	204
4.5.2.	Satz von CAYLEY-HAMILTON . . . . .	207
4.5.3.	Eigenraum. Vielfachheit von Eigenwerten . . . . .	209
	Aufgaben . . . . .	214
4.6.	Nichtdiagonalisierbare Matrizen. Direkte Summe von Vektorräumen. JORDANSche Normalform . . . . .	214
4.6.1.	Invariante Unterräume . . . . .	215
4.6.2.	Direkte Summe . . . . .	216
4.6.3.	JORDANSche Normalform . . . . .	221
	Aufgaben . . . . .	226
4.6.4.	Beweis für die Existenz der JORDANSchen Normalform . . . . .	226
	Aufgaben . . . . .	233
<b>F.</b>	<b>Metrische Geometrie. Quadratische Formen . . . . .</b>	<b>234</b>
1.	Metrischer Raum . . . . .	234
2.	Skalarprodukt . . . . .	236
3.	SCHMIDT'sches Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	238
4.	Totalsenkrechte Vektorräume . . . . .	239

5.	Bewegungen . . . . .	241
5.1.	Begriff der Bewegung . . . . .	241
5.2.	Geradentreue. Affinität . . . . .	241
5.3.	Eigentliche und uneigentliche Bewegungen . . . . .	242
5.4.	Translationen . . . . .	243
5.5.	Drehungen . . . . .	243
5.6.	Orthogonale Matrizen . . . . .	244
5.7.	Geometrische Deutung . . . . .	245
5.8.	Drehachse . . . . .	246
5.9.	Eigenwerte einer orthogonalen Matrix . . . . .	248
	Aufgaben . . . . .	248
6.	Quadratische Formen . . . . .	249
6.1.	Begriffsbestimmung. Beispiele . . . . .	249
6.2.	Definitheit . . . . .	250
6.3.	Matrixschreibweise. Koordinatentransformation . . . . .	251
6.4.	Hauptachsentransformation . . . . .	251
6.4.1.	Eigenwerte einer symmetrischen Matrix . . . . .	252
6.4.2.	Hauptachsensatz . . . . .	252
6.4.3.	Orthogonalität der Eigenvektoren . . . . .	255
6.4.4.	Praktische Durchführung der Hauptachsentransformation. Beispiele . . . . .	255
6.5.	Kriterien für die Definitheit quadratischer Formen . . . . .	258
6.5.1.	Zusammenhang mit den Eigenwerten . . . . .	258
6.5.2.	SYLVESTERSches Definitheitskriterium . . . . .	259
6.5.3.	SYLVESTERSches Trägheitsgesetz . . . . .	260
6.6.	Anwendung der Hauptachsentransformation auf affine Abbildungen . . . . .	262
7.	Komplexe Geometrie. HERMITESche Formen . . . . .	263
	Aufgaben . . . . .	264
G.	Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Anfangsgründe der projektiven Geometrie . . . . .	265
1.	Kurven zweiter Ordnung . . . . .	265
1.1.	Definition . . . . .	265
1.2.	Normalformen . . . . .	265
1.3.	Klassifikation . . . . .	267
1.4.	Bestimmung von Drehwinkel und Mittelpunkt . . . . .	268
1.5.	Einige allgemeine Eigenschaften von Kurven zweiter Ordnung . . . . .	270
1.5.1.	Geraden auf Kurven zweiter Ordnung . . . . .	270
1.5.2.	Bestimmung einer Kurve zweiter Ordnung . . . . .	271
1.6.	Nähere Untersuchung der eigentlichen Kegelschnitte . . . . .	272
1.6.1.	Ellipse und Hyperbel . . . . .	272
1.6.2.	Parabel . . . . .	273
1.6.3.	Scheitelgleichung der Kegelschnitte . . . . .	274
1.6.4.	Polarkoordinaten . . . . .	276
1.7.	Pol und Polare . . . . .	276
	Aufgaben . . . . .	278
2.	Projektive Geometrie . . . . .	278
2.1.	Einführung der projektiven Ebene . . . . .	278
2.2.	Dualität . . . . .	279
2.3.	Projektiver Raum . . . . .	280

2.4.	Projektive Abbildungen . . . . .	281
2.5.	Projektive Skala auf einer Geraden . . . . .	282
2.6.	Doppelverhältnis . . . . .	283
	Aufgabe . . . . .	283
2.7.	Bestimmung einer projektiven Abbildung . . . . .	283
2.8.	Trennende Punktepaare. Charakterisierung projektiver Abbildungen . . . . .	284
2.9.	Korrelationen . . . . .	286
3.	Kegelschnitte in der projektiven Ebene . . . . .	286
3.1.	Polarverwandtschaft . . . . .	286
3.2.	Konjugierte Durchmesser . . . . .	288
3.3.	Anwendung des Doppelverhältnisses . . . . .	289
3.3.1.	Invarianz des Doppelverhältnisses beim Projizieren . . . . .	289
3.3.2.	Satz vom vollständigen Viereck . . . . .	290
3.3.3.	Konstruktion des 4. harmonischen Punktes . . . . .	291
3.3.4.	Anwendung des Doppelverhältnisses auf eine involutorische Projektivität . . . . .	292
3.4.	Projektive Klassifikation der Kegelschnitte . . . . .	292
3.5.	Kurven zweiter Klasse . . . . .	294
	Aufgaben . . . . .	295
4.	Flächen zweiter Ordnung . . . . .	295
4.1.	Definition. Normalformen . . . . .	295
4.2.	Gestaltliche Verhältnisse . . . . .	296
4.3.	Geradenscharen . . . . .	298
4.4.	Klassifikation . . . . .	299
4.5.	Polarverwandtschaft . . . . .	300
5.	Erlanger Programm . . . . .	301
	Sachwortverzeichnis . . . . .	303