

Inhalt

Funktionalanalysis

1 Grundlegende Räume

1.1 Metrische Räume	2
1.1.1 Definition und Beispiele	2
1.1.2 Topologische Hilfsmittel	7
1.1.3 Konvergenz in metrischen Räumen. Vollständigkeit	8
1.1.4 Bestapproximation in metrischen Räumen	18
1.1.5 Der Banachsche Fixpunktsatz. Anwendungen	19
1.2 Normierte Räume. Banachräume	30
1.2.1 Lineare Räume	30
1.2.2 Normierte Räume. Banachräume	34
1.3 Skalarprodukträume. Hilberträume	42
1.3.1 Skalarprodukträume	42
1.3.2 Hilberträume	50
1.3.3 Ein Approximationsproblem	54
1.3.4 Der Zerlegungssatz	60
1.3.5 Orthonormalsysteme in Hilberträumen	67
1.3.6 Fourierentwicklung in Hilberträumen	74
1.3.7 Struktur von Hilberträumen	76

2 Lineare Operatoren in normierten Räumen

2.1 Beschränkte lineare Operatoren	81
2.1.1 Stetigkeit und Beschränktheit. Operatornorm	81
2.1.2 Folgen und Reihen von beschränkten Operatoren	87
2.1.3 Die Neumannsche Reihe. Anwendungen	88
2.1.4 Lineare Funktionale in normierten Räumen	95
2.1.5 Der Rieszsche Darstellungssatz	97
2.1.6 Adjungierte und symmetrische Operatoren	100
2.2 Fredholmsche Theorie in Skalarprodukträumen	104
2.2.1 Vollstetige Operatoren	105
2.2.2 Ausgeartete Operatoren	108
2.2.3 Die Fredholmsche Alternative	111
2.2.4 Der Fredholmsche Alternativsatz in Hilberträumen	112
2.2.5 Der Fredholmsche Alternativsatz in Skalarprodukträumen	118

X Inhalt

2.3 Symmetrische vollstetige Operatoren	129
2.3.1 Eigenwerte und -elemente vollstetiger symmetrischer Operatoren. Fourierentwicklung	131
2.3.2 Zusammenfassung	140
2.3.3 Anwendung auf symmetrische Integraloperatoren	140
2.3.4 Ein Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem	143
2.3.5 Das Spektrum eines symmetrischen Operators	153

3 Der Hilbertraum $L_2(\Omega)$ und zugehörige Sobolevräume

3.1 Der Hilbertraum $L_2(\Omega)$	161
3.1.1 Motivierung	161
3.1.2 Definition von $L_2(\Omega)$	163
3.1.3 Einbettung von $C_0^\infty(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$	165
3.1.4 Restriktion und norminvariante Erweiterung von L_2 -Funktionalen	172
3.1.5 Produkt von L_2 -Funktionalen mit stetigen Funktionen	173
3.1.6 Differentiation in $L_2(\Omega)$	174
3.2 Sobolevräume	179
3.2.1 Der Sobolevraum $H_m(\Omega)$	179
3.2.2 Der Sobolevraum $\dot{H}_m(\Omega)$	181
3.2.3 Ergänzungen	183

Partielle Differentialgleichungen

4 Einführung

4.1 Was ist eine partielle Differentialgleichung?	187
4.1.1 Partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung	187
4.1.2 Beispiele	189
4.1.3 Herleitung von partiellen Differentialgleichungen	191
4.2 Lineare partielle Differentialgleichungen 1-ter Ordnung	195
4.2.1 Zurückführung auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen	195
4.2.2 Anwendung auf die Kontinuitätsgleichung	198
4.3 Lineare partielle Differentialgleichungen 2-ter Ordnung	200
4.3.1 Klassifikation	200
4.3.2 Separationsansätze	203

5 Helmholtzsche Schwingungsgleichung und Potentialgleichung

5.1 Grundlagen	206
5.1.1 Hilfsmittel aus der Vektoranalysis	206
5.1.2 Radialsymmetrische Lösungen	208
5.1.3 Die Darstellungsformel für Innengebiete	210
5.1.4 Mittelwertformel und Maximumprinzip	216
5.1.5 Flächen- und Volumenpotentiale	219
5.2 Ganzraumprobleme	221
5.2.1 Volumenpotentiale und inhomogene Schwingungsgleichung	222
5.2.2 Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung	230
5.2.3 Die Darstellungsformel für Außengebiete	240
5.2.4 Ganzraumprobleme	242
5.3 Randwertprobleme	246
5.3.1 Problemstellungen und Eindeutigkeitsfragen	247
5.3.2 Sprungrelationen	253
5.3.3 Lösungsnachweise mit Integralgleichungsmethoden	255
5.4 Ein Eigenwertproblem der Potentialtheorie	272
5.4.1 Die Greensche Funktion zum Dirichletschen Innenraumproblem	272
5.4.2 Eigenwerte und Eigenfunktionen des Laplaceoperators	276
5.5 Einführung in die Methode der finiten Elemente (F. Wille)	280
5.5.1 Die Frechet-Ableitung	280
5.5.2 Variationsprobleme	283
5.5.3 Elliptische Randwertprobleme und äquivalente Variationsprobleme	290
5.5.4 Prinzip der Finite-Elemente-Methode (FEM)	296
5.5.5 Diskretes Variationsproblem	298
5.5.6 Beispiele	304
5.5.7 Ausblick auf weitere Möglichkeiten der Finite-Elemente-Methode	310

6 Die Wärmeleitungsgleichung

6.1 Rand- und Anfangswertprobleme	318
6.1.1 Ein Rand- und Anfangswertproblem mit Dirichletscher Randbedingung	319
6.1.2 Die Eindeutigkeitsfrage	321
6.1.3 Lösungsbestimmung mittels Eigenwerttheorie	322

XII Inhalt

6.2 Ein Anfangswertproblem	324
6.2.1 Aufgabenstellung	325
6.2.2 Die Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung	325
6.2.3 Lösungsbestimmung mittels Fouriertransformation	326

7 Die Wellengleichung

7.1 Die homogene Wellengleichung	330
7.1.1 Anfangswertprobleme im \mathbb{R}^1	330
7.1.2 Anfangswertprobleme im \mathbb{R}^3	335
7.1.3 Anfangswertprobleme im \mathbb{R}^2 („Method of descent“)	341
7.1.4 Das Huygenssche Prinzip	344
7.1.5 Bemerkungen zu Rand- und Anfangswertproblemen	346
7.2 Die inhomogene Wellengleichung im \mathbb{R}^3	349
7.2.1 Das Duhamelsche Prinzip	349
7.2.2 Die Kirchhoffsche Formel	352
7.2.3 Erzwungene Schwingungen	353

8 Hilbertraummethoden

8.1 Einführung	357
8.1.1 Ein schwaches Dirichletproblem für die inhomogene Schwingungsgleichung	357
8.1.2 Nachweis einer schwachen Lösung	358
8.1.3 Ein äquivalentes schwaches Problem	361
8.2 Das schwache Dirichletproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen	362
8.2.1 Das klassische Dirichletproblem	362
8.2.2 Das schwache Dirichletproblem	363
8.2.3 Ein äquivalentes schwaches Problem	364
8.2.4 Schwache Lösungen bei strikt positiven elliptischen Differentialoperatoren	366
8.2.5 Schwache Lösungen bei gleichmäßig elliptischen Differentialoperatoren	368
8.2.6 Eigenwerte und -elemente des schwachen Dirichletproblems	375
8.3 Das schwache Neumannproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen	377
8.3.1 Ein schwaches Neumannproblem für die inhomogene Schwingungsgleichung	378
8.3.2 Nachweis einer schwachen Lösung	384
8.3.3 Ausblick auf den allgemeinen Fall	385

8.4 Zur Regularitätstheorie beim Dirichletproblem	386
8.4.1 Innenregularität	387
8.4.2 Randregularität	388
Anhang	395
Lösungen zu den Übungen ¹⁾	400
Symbole	427
Literaturverzeichnis	431
Sachverzeichnis	441

¹⁾ Zu den mit * versehenen Übungen werden Lösungen angegeben oder Lösungswege skizziert.