

# Inhaltsverzeichnis

## A. Grundlagen

§1.	Reelle Zahlen . . . . .	1
	1.1 Mengen 4 * 1.2 Funktionen 5 * 1.3 Körperaxiome 6 * 1.4 Ordnungsaxiome 7 * 1.5 Obere und untere Schranken, größtes und kleinstes Element, Supremum und Infimum 9 * 1.6 Das Vollständigkeitsaxiom. 1.7 Vorzeichen und Absolutbetrag 10 * 1.8 Die Menge $\overline{\mathbb{R}}$ 11 * 1.9 Intervalle und Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen 12 * 1.10 Bemerkungen zur Axiomatik 13 * 1.11 Bemerkungen zur Logik und Beweistechnik 14 * Aufgaben 15	
§2.	Natürliche Zahlen und vollständige Induktion . . . . .	17
	2.1 Definition der natürlichen Zahlen. 2.2. Beweis durch vollständige Induktion 18 * 2.3 Einige Eigenschaften von $\mathbb{N}$ 19 * 2.4 Die archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen 20 * 2.5 Ganze und rationale Zahlen. 2.6 Endliche Mengen 21 * 2.7 Folge, Kartesisches Produkt und $n$ -Tupel. 2.8 Rekursive Definition 22 * 2.9 Abzählbare Mengen 23 * 2.10 Nichtabzählbare Mengen 24 * 2.11 Definition des Summen- und des Produktzeichens 25 * 2.12 Einige einfache Tatsachen 27 * 2.13 Bernoullische Ungleichung. 2.14 Die Binomialformel 28 * 2.15 Zahlendarstellung in Positionssystemen 31 * 2.16 Kombinatorische Aufgaben 32 * 2.17 Die Fibonacci-Zahlen 33 * Aufgaben 34	
§3.	Polynome und Wurzeln . . . . .	37
	3.1 Das Rechnen mit Funktionen. Funktionenraum und Funktionenalgebra. 3.2 Polynome 39 * 3.3 Das Interpolationspolynom 42 * 3.4 Monotone Funktionen 43 * 3.5 Die Lipschitz-Bedingung 44 * 3.6 Die $n$ -te Wurzel. Definition und Satz 46 * 3.7 Arithmetisches und geometrisches Mittel 47 * 3.8 Potenzen mit rationalen Exponenten 48 * Aufgaben 50	

## B. Grenzwert und Stetigkeit

§4.	Zahlenfolgen . . . . .	52
	4.1 Reelle Zahlenfolgen. 4.2 Nullfolgen 58 * 4.3 Konvergente Folgen 60 * 4.4 Rechenregeln 62 * 4.5 Teilfolge, Umordnung einer Folge. 4.6 Divergente Folgen 64 * 4.7 Konvergenzkriterien für monotone Folgen 65 * 4.8 Die Exponentialfunktion. Definition und Satz 66 * 4.9 Der Logarithmus 67 * 4.10 Iterationsverfahren. Berechnung von Wurzeln 69 * 4.11 Das arithme-	

tisch-geometrische Mittel von Gauß 70 \* 4.12 Häufungswerte von Folgen 71 \* 4.13 Satz von Bolzano-Weierstraß für Folgen. 4.14 Konvergenzkriterium von Cauchy 72 \* 4.15 Oberer und unterer Limes beschränkter Folgen 73 \* 4.16 Folgen in  $\overline{\mathbb{R}}$  74 \* Aufgaben 76

- §5. Unendliche Reihen . . . . . 78
- 5.1 Definitionen und einfache Eigenschaften 86 \* 5.2 Satz 88 \* 5.3 Satz. 5.4 Einige Reihensummen 89 \* 5.5 Reihen mit positiven Gliedern 92 \* 5.6 Alternierende Reihen 93 \* 5.7 Das Konvergenzkriterium von Cauchy. 5.8 Absolute Konvergenz 94 \* 5.9 Kriterium für absolute Konvergenz 95 \* 5.10 Verdichtungssatz von Cauchy 97 \* 5.11 Umordnung von unendlichen Reihen 98 \* 5.12 Reihen mit beliebigen Indexmengen 99 \* 5.13 Großer Umordnungssatz 100 \* 5.14 Doppelreihen 101 \* 5.15 Multiplikation von Reihen 102 \* 5.16 Bedingte und unbedingte Konvergenz 104 \* 5.17 Riemannscher Umordnungssatz. 5.18 Dezimalbrüche und  $g$ -adische Entwicklung 105 \* Aufgaben 107
- §6. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit . . . . . 109
- 6.1 Grenzwert und Stetigkeit 114 \* 6.2 Einseitiger Limes, einseitige Stetigkeit 116 \* 6.3 Folgenkriterium 117 \* 6.4 Das Konvergenzkriterium von Cauchy 118 \* 6.5 Rechenregeln. 6.6 Satz 119 \* 6.7 Zusammengesetzte Funktionen (Komposition). 6.8 Stetigkeit auf einem kompakten Intervall. Maximum und Minimum einer Funktion 120 \* 6.9 Gleichmäßige Stetigkeit 121 \* 6.10 Zwischenwertsatz 123 \* 6.11 Satz über die Umkehrfunktion 124 \* 6.12 Limes für  $x \rightarrow \pm \infty$  125 \* 6.13 Uneigentliche Grenzwerte 126 \* 6.14 Konvergenzkriterium für monotone Funktionen. 6.15 Sprungstelle und Schwankung 127 \* 6.16 Stetigkeitsmodul. 6.17 Stetige Fortsetzung 128 \* Aufgaben 129
- §7. Potenzreihen. Elementar-transzendente Funktionen . . . . . 131
- 7.1 Gleichmäßige Konvergenz 139 \* 7.2 Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. 7.3 Satz 140 \* 7.4 Gleichmäßige Konvergenz von Reihen 141 \* 7.5 Das Weierstraßsche Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz. 7.6 Potenzreihen 142 \* 7.7 Satz. 7.8 Multiplikation von Potenzreihen 144 \* 7.9 Die Exponentialreihe 145 \* 7.10 Identitätssatz für Potenzreihen. 7.11 Die logarithmische Reihe 147 \* 7.12 Der Grenzwertsatz von Abel 149 \* 7.13 Einsetzen von Potenzreihen 150 \* 7.14 Division von Potenzreihen. 7.15 Berechnung von Potenzreihen, Koeffizientenvergleich 151 \* 7.16 Sinus und Cosinus 152 \* 7.17 Die Arcusfunktionen (zyklometrische Funktionen) 156 \* 7.18 Die Hyperbelfunktionen 158 \* 7.19 Die Areafunktionen 159 \* 7.20 Potenzreihen für Tangens und Cotangens 160 \* 7.21 Nochmals Potenzsummen 162 \* Aufgaben 163
- §8. Komplexe Zahlen und Funktionen . . . . . 166
- 8.1 Der Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen 166 \* 8.2 Polarkoordinaten 168 \* 8.3 Wurzeln und Einheitswurzeln 169 \* 8.4 Polynome 170 \* 8.5 Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen 171  
Komplexe Analysis. 8.6 Umgebungen 174 \* 8.7 Konvergenz von Folgen und Reihen 174 \* 8.8 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen. 8.9 Potenzreihen 176 \* 8.10 Entwicklung um einen neuen Mittelpunkt 177 \* 8.11 Die Exponentialfunktion im Komplexen 178 \* 8.12 Die Partialbruchzerlegung des Cotangens 181 \* 8.13 Die Riemannsche Zetafunktion 183 \* Aufgaben 184

**C. Differential- und Integralrechnung**

§9.	Das Riemannsches Integral . . . . .	187
	9.1 Zerlegung, Ober- und Untersumme 197 * 9.2 Hilfssatz 198 * 9.3 Oberes und unteres Integral. Das Riemann-Integral. 9.4 Satz 199 * 9.5 Integrierbarkeitskriterium von Riemann. 9.6 Satz über Integrierbarkeit 201 * 9.7 Die Riemannsches Definition des Integrals 202 * 9.8 Komplexwertige Funktionen. 9.9 Satz über die Linearität des Integrals 205 * 9.10 Einige Eigenschaften des Integrals 206 * 9.11 Satz. 9.12 Dreiecksungleichung für Integrale 207 * 9.13 <u>Mittelwertsatz der Integralrechnung</u> 208 * 9.14 Satz über gliedweise Integration 209 * 9.15 Integrale über Teilintervalle 211 * 9.16 Das Integral als Funktion der oberen Grenze 212 * 9.17 Die Bestimmung von Summen durch Integrale 213 * 9.18 Die Berechnung von $\pi$ 215 * Aufgaben 218	
§10.	Differentiation . . . . .	221
	10.1 Differenzenquotient und Ableitung 240 * 10.2 Einseitige Differenzierbarkeit 242 * 10.3 Einfache Tatsachen 243 * 10.4 Das Differential 245 * 10.5 Rechenregeln für die Ableitung 246 * 10.6 Die Kettenregel 247 * 10.7 Ableitung der Umkehrfunktion 248 * 10.8 Zusammenfassung 249 * 10.9 Höhere Ableitungen, die Klassen $C^k$ 251 * 10.10 <u>Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung</u> 254 * 10.11 Regel von de l'Hospital 256 * 10.12 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 259 * 10.13 Satz über gliedweise Differentiation 261 * 10.14 Taylor-Reihe und Taylor-Polynom 262 * 10.15 Satz von Taylor 263 * 10.16 Die Taylorsche Entwicklung von Funktionen 265 * 10.17 Satz von S. Bernstein (1914). 10.18 Das Gegenbeispiel von Cauchy 267 * Aufgaben 268	
§11.	Anwendungen . . . . .	273
	11.1 Die Stammfunktion oder das unbestimmte Integral 273 * 11.2 Die Technik des Integrierens 274 * 11.3 Partielle Integration 275 * 11.4 Die Substitutionsregel 277 * 11.5 Die Integration der rationalen Funktionen 278 * 11.6 Satz 280 * 11.7 Vorläufiges zum Inhaltsproblem 282 * 11.8 Die Fläche ebener Bereiche als Integral 283 * 11.9 Darstellung in Polarkoordinaten 284 * 11.10 Das Volumen von Rotationskörpern 286 * 11.11 Schwerpunkte 290 * 11.12 Trägheitsmomente 293 * 11.13 Mechanische Arbeit 295 * 11.14 Numerische Integration 296 * 11.15 Hinreichende Kriterien für Maxima und Minima. 11.16 Kriterien für Wendepunkte 300 * 11.17 Konvexe und konkave Funktionen. 11.18 Die Jensensche Ungleichung für konvexe Funktionen 301 * 11.19 Mehr über konvexe Funktionen 303 * 11.20 Kurvendiskussion 304 * 11.21 Mittelwerte mit einer beliebigen Funktion 307 * 11.22 Satz über die Mittel $r$ -ter Ordnung 308 * 11.23 Höldersche Ungleichung 309 * 11.24 Minkowskische Ungleichung 310 * 11.25 Eine Ungleichung von Redheffer 311 * 11.26 Kontrahierende Abbildungen. Das Kontraktionsprinzip 312 * 11.27 Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung 317 * Aufgaben 320	
§12.	Ergänzungen . . . . .	323
	Uneigentliche Integrale. 12.1 Unbeschränkter Integrationsbereich 323 * 12.2 Rechenregeln 324 * 12.3 Das Konvergenzkriterium von Cauchy. 12.4 Absolute Konvergenz, Majorantenkriterium 325 * 12.5 Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale 326 * 12.6 Grenzübergang unter dem Integralzeichen 327 * 12.7 Unbeschränkter Integrand 328 * 12.8 Die Gammafunktion 330	

Einfache Differentialgleichungen 333 \* 12.9 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung 334 \* 12.10 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung 336 \* 12.11 Der harmonische Oszillator 339 \* 12.12 Reibungskräfte 341 \* 12.13 Gedämpfte Schwingung 342 \* 12.14 Resonanz 344  
 Die Eulersche Summenformel. 12.15 Bernoullische Polynome 346 \* 12.16 Eulersche Summenformel 347 \* 12.17 Die Eulersche Konstante 349 \* 12.18 Produktdarstellung des Sinus 350 \* 12.19 Wallissches Produkt. 12.20 Die Stirlingsche Formel 351  
Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Dini-Derivierte 353 \* 12.21 Satz 355 \* 12.22 Limes superior und Limes inferior 356 \* 12.23 Die vier Dini-Derivierten 357 \* 12.24 Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung 358 \* 12.25 Satz. 12.26 Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion 359 \* Aufgaben 361

Lösungen und Lösungshinweise zu ausgewählten Aufgaben . . . . .	364
Literatur . . . . .	371
Bezeichnungen und Grundformeln . . . . .	374
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .	375