

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Pythagoräische Zahlentripel . . . . .	1
1.2	Die Pellsche Gleichung . . . . .	3
1.3	Die Fermatsche Vermutung . . . . .	3
1.4	Kongruenzen . . . . .	7
1.5	Public Key Cryptology . . . . .	10
1.6	Quadratische Reste . . . . .	11
1.7	Primzahlverteilung . . . . .	21
1.8	Der Primzahlsatz . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Die Geometrie der Zahlen</b>	<b>33</b>
2.1	Binäre quadratische Formen . . . . .	33
2.2	Vollständige zerlegbare Formen $n$ -ten Grades . . . . .	34
2.3	Moduln und Ordnungen . . . . .	37
2.4	Vollständige Moduln in endlichen Erweiterungen von $P$ . . . . .	40
2.5	Die ganzen Zahlen quadratischer Zahlkörper . . . . .	42
2.6	Weitere Beispiele für die Bestimmung einer $\mathbb{Z}$ -Basis . . . . .	43
2.7	Die Endlichkeit der Klassenzahl . . . . .	44
2.8	Die Einheitengruppe . . . . .	45
2.9	Ansatz zum Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes . . . . .	47
2.10	Der Rang von $l(E)$ . . . . .	48
2.11	Der Regulator einer Ordnung . . . . .	52
2.12	Der Gitterpunktsatz . . . . .	52
2.13	Die Minkowskische Geometrie der Zahlen . . . . .	53
2.14	Anwendung auf vollständige zerlegbare Formen . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Die Dedekindsche Idealtheorie</b>	<b>62</b>
3.1	Grundlegende Definitionen . . . . .	63
3.2	Der Hauptsatz der Dedekindschen Idealtheorie . . . . .	65
3.3	Folgerungen aus dem Hauptsatz . . . . .	67
3.4	Die Umkehrung des Hauptsatzes . . . . .	69
3.5	Die Norm eines Ideals . . . . .	70
3.6	Kongruenzen . . . . .	72
3.7	Lokalisierung . . . . .	74
3.8	Die Zerlegung eines Primideals in einer endlichen Erweiterung . . . . .	76
3.9	Die Klassengruppe eines algebraischen Zahlkörpers . . . . .	79
3.10	Relative Erweiterungen . . . . .	83
3.11	Geometrische Deutung . . . . .	87
3.12	Differente und Diskriminante . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Bewertungen</b>	<b>97</b>

4.1	Bewertete Körper . . . . .	97
4.2	Die Bewertungen des Körpers der rationalen Zahlen . . . . .	103
4.3	Vervollständigung . . . . .	106
4.4	Vollständige Körper bezüglich einer diskreten Bewertung . . . . .	107
4.5	Fortsetzung einer Bewertung eines vollständigen Körpers . . . . .	113
4.6	Endliche Erweiterungen eines vollständigen Körpers . . . . .	116
4.7	Vollständige Körper mit endlichem Restklassenkörper . . . . .	121
4.8	Fortsetzung der Bewertung eines beliebigen Körpers . . . . .	124
4.9	Die Arithmetik im Kompositum zweier Erweiterungen . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Algebraische Funktionen einer Unbestimmten</b>	<b>131</b>
5.1	Algebraische Funktionenkörper . . . . .	132
5.2	Die Stellen eines algebraischen Funktionenkörpers . . . . .	134
5.3	Der einem Divisor zugeordnete Funktionenraum . . . . .	138
5.4	Differentiale . . . . .	143
5.5	Erweiterungen des Konstantenkörpers . . . . .	147
5.6	Der Satz von Riemann-Roch . . . . .	149
5.7	Funktionenkörper vom Geschlecht 0 . . . . .	153
5.8	Funktionenkörper vom Geschlecht 1 . . . . .	155
<b>6</b>	<b>Normale Erweiterungen</b>	<b>159</b>
6.1	Zerlegungsgruppe und Verzweigungsgruppen . . . . .	159
6.2	Neuer Beweis des Dedekindschen Differentensatzes . . . . .	163
6.3	Primidealzerlegung in einem Zwischenkörper . . . . .	165
6.4	Kreisteilungskörper . . . . .	167
6.5	Der erste Fall der Fermatschen Vermutung . . . . .	171
6.6	Lokalisierung . . . . .	175
6.7	Die obere Numerierung der Verzweigungsgruppen . . . . .	177
6.8	Kummersche Erweiterungen . . . . .	182
<b>7</b>	<b><math>L</math>-Reihen</b>	<b>188</b>
7.1	Von der Riemannschen $\zeta$ -Funktion zu den Heckeschen $L$ -Reihen . . . . .	188
7.2	Normierte Bewertungen . . . . .	192
7.3	Adele . . . . .	193
7.4	Idele . . . . .	196
7.5	Ideleklassengruppe und Strahlklassengruppe . . . . .	198
7.6	Hecke-Charaktere . . . . .	202
7.7	Analysis auf lokalen additiven Gruppen . . . . .	203
7.8	Analysis auf der Adelegruppe . . . . .	207
7.9	Die multiplikative Gruppe eines lokalen Körpers . . . . .	211
7.10	Die lokale Funktionalgleichung . . . . .	213
7.11	Berechnung von $\rho(c)$ für $K = \mathbb{R}$ . . . . .	215
7.12	Berechnung von $\rho(c)$ für $K = \mathbb{C}$ . . . . .	218
7.13	Berechnung der $\rho$ -Faktoren für $K$ nicht-archimedisch . . . . .	220
7.14	Beziehungen zwischen $\rho$ -Faktoren . . . . .	223
7.15	Analysis auf der Idelegruppe . . . . .	224

7.16	Globale $\zeta$ -Funktionen . . . . .	227
7.17	Die Dedekindsche $\zeta$ -Funktion . . . . .	231
7.18	Heckesche $L$ -Reihen . . . . .	235
7.19	Kongruenz-Zetafunktionen . . . . .	237
<b>8</b>	<b>Anwendungen der Heckeschen <math>L</math>-Reihen</b>	<b>243</b>
8.1	Die Zerlegung von Primzahlen in algebraischen Zahlkörpern . . . . .	243
8.2	Das Nichtverschwinden der $L$ -Reihen an der Stelle 1 . . . . .	246
8.3	Die Verteilung von Primidealen in algebraischen Zahlkörpern . . . . .	249
8.4	Die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung . . . . .	253
<b>9</b>	<b>Quadratische Zahlkörper</b>	<b>257</b>
9.1	Quadratische Formen und Ordnungen in quadratischen Zahlkörpern	257
9.2	Berechnung der Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper . . . . .	263
9.3	Kettenbrüche . . . . .	266
9.4	Periodische Kettenbrüche . . . . .	271
9.5	Die Grundeinheit in Ordnungen von reell-quadratischen Zahlkörpern	275
9.6	Der Charakter eines quadratischen Zahlkörpers . . . . .	281
9.7	Die arithmetische Klassenzahlformel . . . . .	283
9.8	Die Berechnung der Gaußschen Summe . . . . .	289
<b>10</b>	<b>Ausblick</b>	<b>294</b>
10.1	Absolut-abelsche Erweiterungen . . . . .	294
10.2	Der Klassenkörper zur Strahlklassengruppe . . . . .	295
10.3	Lokale Klassenkörpertheorie . . . . .	299
10.4	Formulierung der Klassenkörpertheorie mit Hilfe von Idelen . . . . .	300
<b>A</b>	<b>Teilbarkeitstheorie</b>	<b>303</b>
A.1	Teilbarkeit in Monoiden . . . . .	303
A.2	Hauptidealringe . . . . .	305
A.3	Euklidische Ringe . . . . .	307
A.4	Endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen . . . . .	309
A.5	Moduln über Euklidischen Ringen . . . . .	315
A.6	Arithmetik von Polynomen über Ringen . . . . .	317
<b>B</b>	<b>Spur, Norm, Differente und Diskriminante</b>	<b>318</b>
<b>C</b>	<b>Harmonische Analyse auf lokalkompakten abelschen Gruppen</b>	<b>322</b>
C.1	Topologische Gruppen . . . . .	322
C.2	Der Pontrjaginsche Dualitätssatz . . . . .	322
C.3	Das Haarsche Integral . . . . .	323
C.4	Das beschränkte direkte Produkt . . . . .	327
C.5	Die Poissonsche Summenformel . . . . .	332
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>335</b>
	<b>Sachwortverzeichnis</b>	<b>340</b>